Ministry of Science and Education

Oles Honchar Dnepropetrovsk National University

International Conference

Approximation Theory and Applications

In memory of N.P. Korneichuk

Abstracts

June 14-17, 2010
Dnepropetrovsk, Ukraine

Аппроксимация периодических функций многих переменных кусочно постоянными функциями в пространстве со сходимостью по мере

Т. А. Агошкова

Пусть $f(x)$, $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, — действительнозначные функции m переменных, имееющие период 1 по каждой переменной; $\mathbb{T}^m = [0;1)^m$ — основной тор периодов; $L_0 \equiv L_0(\mathbb{T}^m)$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на $\mathbb{T}^m$ конечны и измеримы.

Для любой функции типа модуля непрерывности $\varphi(y)$ пространство $L_\varphi = \left\{ f \in L_0(\mathbb{T}^m) : \|f\|_\varphi := \int\limits_{\mathbb{T}^m} \varphi(|f(x)|)\, dx < \infty \right\}$ — метрическое .

Пусть $\omega(f,h)_\varphi := \sup\limits_{\|t\|_\infty \le h} \|\Delta_t f\|_\varphi$ — модуль непрерывности f в пространстве L_φ, где $\Delta_t f(x) = f_t(x) - f(x)$, $f_t(x) = f(x+t)$ и $t = (t_1, ..., t_m)$; $L_{n...n}$ — пространство 1-периодических кусочно постоянных функций $l_{n...n}$, соответствующих равномерному разбиению $\mathbb{T}^m$ на $\left[\frac{i_1}{n}; \frac{i_1+1}{n}\right) \times ... \times \left[\frac{i_m}{n}; \frac{i_m+1}{n}\right)$, где $i_j = 1, ..., n-1, j = 1, ..., m$;

$E_{n...n}(f)_\varphi := \inf\limits_{l_{n...n} \in L_{n...n}} \|f - l_{n...n}\|_\varphi$— наилучшее приближение на периоде в метрике L_φ функции f элементами подпространства $L_{n...n}$;

$\overline{E}_{n...n}(f)_\varphi := \inf\limits_{l_{n...n} \in L_{n...n}} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \|f_t - l_{n...n}\|_\varphi dt.$

Теорема 1.

$$\overline{E}_{n...n}(f)_\varphi \le \omega\left(f, \tfrac{1}{n}\right)_\varphi$$

Лемма. Для любой функции $l_{n...n} \in L_{n...n}$ при $h \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$ и для $\forall \|t\| \le h$ выполняется неравенство

$$\|\Delta_t l_{n...n}\|_\varphi \le 2\,(nh)^m\, \|l_{n...n}\|_\varphi$$

Теорема 2. Для $m > 1$ и любой функции $f \in L_\varphi$ и всех $n = 1, 2, ...$ имеют место неравенства

$$\omega\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\varphi \le \frac{C}{2^{nm}} \sum_{k=1}^{n} 2^{km} \overline{E}_{2^k...2^k}(f)_\varphi$$

Следствие. $\forall \alpha \in (0,1]$ $f \in Lip(\alpha, L_\varphi) \Leftrightarrow \overline{E}_{2^k...2^k}(f)_\varphi \le c\left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha$, $k = 1, 2, ...$

Литература

1. С. А. Пичугов, *Аппроксимация измеримых периодических функций по мере кусочнопостоянными функциями,* Укр. мат. журн., (1996)**-48, №5**, 711–715.

Днепропетровский национальный
университет
e-mail: tanya_agoshkova@mail.ru

О некоторых теоремах вложения

Виталий Андриенко

Пусть Φ — совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на полупрямой $[0,\infty)$ функций φ с $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. Через $\varphi(L)$ $(\varphi\in\Phi)$ обозначим класс всех измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых $\int_0^1\varphi(f(x))dx<\infty$. Через H_p^ω обозначают класс всех функций f с $L^p(0,1)$, $1\le p<\infty$, у которых $\omega_p(f,x)\le\omega(x)$. Через f^* обозначают невозрастающую на $(0,1)$ равноизмеримую с $|f|$ функцию. В конце 60-х и в начале 70-х гг прошлого столетия П.Л. Ульянов заложил основы теории вложения классов H_p^ω. В частности,П.Л. Ульянов (1968)поставил вопрос о необходимых и достаточных условиях для вложения

$$H_p^\omega\subset\varphi(L) \tag{1}$$

и получил эти условия в некоторых важных случаях, когда φ растет не быстрее, чем некоторая степенная функция, а также достаточные условия (1970) для ряда вложений (1). Позднее эти исследования развивались в работах В.А.Андриенко (1969), Л. Лейндлера (1970), Э.А.Стороженко (1971-76), В.И.Коляды (1975) и других в случае функций φ, растущих не быстрее степенных.

П. Л. Ульянов (1970) получил первый результат для быстро растущих функций. Он нашел достаточное условие на $\omega_1(f,\delta)$, при котором $f\in e^L$. Развитием этого результата является работа Э.А. Стороженко (1971), где указаны достаточные условия на $\omega_p(f,\delta),p>1$, обеспечивающие включение $f\in e^L$. Э.А. Стороженко впервые нашла необходимые достаточные условия(1976) для вложения (1) в случае $p=1,\varphi=\exp|x|$ и выпуклого модуля непрерывности ω. Последний результат она перенесла (1978) на случай функций φ, удовлетворяющих так называемому ω-условию:

$$\varphi(x+1)=O\{\varphi(x)\},\quad x\to\infty. \tag{2}$$

Мы получаем[1] необходимые условия для вложения(1)для более широкого класса быстро растущих функций φ, чем в нашей работе (2006).В случае $p=1$ эти условия являются и достаточными.

[1] Андрієнко В.О.,*Необхідні умови вкладення в класс $\varphi(L)$,*Зб. праць інституту математики НАН України ,**5** (2008),1-13.

Одесский национальный
университет
e-mail: andrienko.v@gmail.com

Достаточное условие гладкости функций многих переменных

А.П. Антонов

Рассмотрим тригонометрический ряд $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty}a_{\mathbf{n}}e^{i\mathbf{nx}}=\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{n_m=1}^{\infty}a_{n_1,\,\ldots,\,n_m}e^{i(n_1x_1+\ldots+n_mx_m)}$, где последовательность $\{a_{n_1,\,\ldots,\,n_m}\}_{n_1=1,\,\ldots,\,n_m=1}^{\infty,\,\ldots,\,\infty}$ удовлетворяет некоторым условиям монотонности. Через $f(\mathbf{x})=f(x_1,\,\ldots,\,x_m)$ будем обозначать сумму данного ряда в тех точках, где он сходится.

Определение. Будем говорить, что последовательность $a_{n_1,\ \ldots,\ n_m}$ монотонно убывает по каждому направлению, если для любых $n_1,\ \ldots,\ n_m \geq 1$ и для любых $j_1,\ \ldots,\ j_m \geq 0$ верно неравенство $a_{n_1,\ \ldots,\ n_m} \geq a_{n_1+j_1,\ \ldots,\ n_m+j_m}$.

Теорема. *Пусть* $m \geq 2$, $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, *функция* $f(\mathbf{x}) \in L_p([-\pi,\ \pi]^m)$ *и* $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ — *её ряд Фурье, коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению,* $0 < \alpha < 1$. *Тогда для того, чтобы* $f(\mathbf{x}) \in Lip\,(\alpha,\ p)$ *достаточно, чтобы выполнялось условие :* $a_{\mathbf{n}} = O\left(|\mathbf{n}|^{m\left(\frac{1}{p}-1\right)-\alpha}\right)$.

На данный момент не установлено, является ли условие теоремы необходимым для принадлежности функции классу Липшица с параметром α в метрике L_p.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00302а).

Московский Государственный
Университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: alt@land.ru

Наближення гіпергеометричних функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами

Тамара Антонова

Апарат гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) використовується для побудови раціональних наближень функцій багатьох змінних. Перше формальне розвинення відношень гіпергеометричних функцій Аппеля F_1 у ГЛД спеціального вигляду отримано ще у 1966 році Н. С. Дронюк. Питанням побудови розвинень відношень гіпергеометричних функцій багатьох змінних у ГЛД різної структури і дослідженню одержаних розвинень присвячені роботи Д. І. Боднара, О. С. Манзій, Н. П. Гоєнко, Т. М. Антонової.

Методи наближення функцій за допомогою функціональних ГЛД використовують принцип відповідності до заданих кратних степеневих рядів, а також рекурентні співвідношення. Так, для побудови розвинень відношень гіпергеометричних функцій Аппеля F_1, F_2, F_3, F_4, а також функцій Лаурічелли $F_B^{(N)}$, $F_D^{(N)}$ було використано рекурентні співвідношення.

Для гіпергеометричних функцій чотирьох змінних $K_{15}(a, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5; c; \bar{z})$, $K_{16}(a_1, a_2, b_1, b_2; c; \bar{z})$, $K_{20}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4; c; \bar{z})$, $K_{21}(a, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6; c; \bar{z})$, де $a, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c$ – комплексні сталі (параметри відповідних функцій), причому $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ [1], встановлено деякі рекурентні співвідношення. Використовуючи ці співвідношення, побудовано розвинення відношень таких функцій у ГЛД з чотирма гілками розгалужень, які можна трактувати як 4-вимірні аналоги ланцюгових дробів Ньорлунда, а також у ГЛД з двома гілками розгалужень. Встановлено деякі достатні умови збіжності отриманих функціональних ГЛД.

Література

1. H. Exton, Multiple hypergeometric functions and applications. – New York-Sydney-Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976.

Національний університет "Львівська політехніка"
e-mail: tamara_antonova@ukr.net

Алгебраические многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля по мере, и родственные задачи

В.В.Арестов

Пусть $\mathcal{P}_m$ есть множество алгебраических многочленов $f_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ порядка $m \geq 0$ с комплексными коэффициентами. При $m \geq 1$ на множестве $\mathcal{P}_m$ рассмотрим функционал

$$\mu(f_m) = \operatorname{mes}\{x \in [-1,1] : \ |f_m(x)| \geq 1\}, \tag{1}$$

значение которого есть мера Лебега множества точек $x \in [-1,1]$, в которых модуль многочлена $f_m \in \mathcal{P}_m$ больше либо равен 1. Для фиксированного $y \in \mathbb{R}$ положим

$$\sigma_m(y) = \inf\{\mu\left(y 2^{m-1} x^m - f_{m-1}(x)\right) : \ f_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}\}. \tag{2}$$

Эту величину можно интерпретировать как величину наилучшего приближения функции $y2^{m-1}x^m$ множеством $\mathcal{P}_{m-1}$ алгебраических многочленов порядка $m-1$ относительно функционала (1). Величину (2) можно записать в другом виде. Пусть $\mathcal{P}_m(y)$ есть множество алгебраических многочленов порядка m, старший коэффициент которых есть $y2^{m-1}$, т. е. многочленов вида $f_m(x) = y2^{m-1}x^m + f_{m-1}(x)$, $f_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}$. Тогда

$$\sigma_m(y) = \inf\{\mu\left(f_m\right) : \ f_m \in \mathcal{P}_m(y)\}; \tag{3}$$

это уже есть вариант задачи о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля.

Справедливо следующее утверждение. В этом утверждении символом T_m обозначены многочлены Чебышева первого рода, которые для $x \in [-1,1]$ определены формулой $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$.

Теорема. При $m \geq 1, \ y > 1$ имеет место равенство

$$\sigma_m(y) = 2\left(1 - y^{-\frac{1}{m}}\right).$$

Более того, многочлен $f_m^*(x) = T_m\left(y^{\frac{1}{m}}\, x\right)$ и его сдвиги $f_m^*(x-h)$, $|h| \leq 1 - y^{-\frac{1}{m}}$, принадлежат множеству $\mathcal{P}_m(y)$ и являются единственными экстремальными в (3).

Будут обсуждаться другие экстремальные задачи, связанные с задачей (2)–(3), в частности, задача о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля относительно интегральных функционалов вида $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(|f_n(t)|)\, dt$ по классу Φ всех неубывающих, неотрицательных функций φ на полуоси $[0, +\infty)$.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ, проект 08-01-00213.

Россия, Екатеринбург
Уральский государственный
университет им. А.М.Горького,
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vitalii.Arestov@usu.ru

Приближение функций полиномами в метриках пространств C и L

А.Г.Бабенко, Ю.В.Крякин

Предполагается привести связь результатов П. Л. Чебышева (1854, 1859), А. А. Маркова (1884), С. Н. Бернштейна (1912), Г. Сеге (1964) о равномерном приближении индивидуальных функций на отрезке (периоде) подпространством алгебраических (тригонометрических) полиномов с весом $w(t) = 1/\vartheta(t)$, где ϑ — алгебраический (тригонометрический) полином положительный на отрезке (периоде), с аналогичными результатами в интегральной метрике А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева (1873), А. А. Маркова (1898), С. Н. Бернштейна (1930), Я. Л. Геронимуса (1935, 1939), Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна (1936, 1938), Б. Надя (1938), С. М. Никольского (1946), Ф. Пейерсторфера (1979) и других математиков.

Планируется также сообщить о приложениях [1,2] указанных результатов к задаче об интегральном приближении характеристической функции интервала подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, решение которой, в свою очередь, применяется к неравенству Джексона между величиной наилучшего равномерного приближения непрерывной периодической функции подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ и ее модулем непрерывности второго порядка. Глубокие результаты в этой проблематике были установлены Н. П. Корнейчуком и его учениками.

Исследования поддержаны РФФИ (проект 08-01-00213) и Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН.

References

1. А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин *Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами*, Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН 14 (3) (2008), 19–37.

2. А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин *Интегральное приближение характеристической функции интервала и неравенство Джексона в* $C(\mathbb{T})$, Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН 15 (1) (2009), 59–65.

Россия, Екатеринбург
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский государственный
университет им. А.М.Горького,
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Poland, Wroclaw
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Об одной теореме Геронимуса

А.Г.Бабенко, Ю.В.Крякин, В.А.Юдин

В 1935 г. Я. Л. Геронимус [1] нашел наилучшее интегральное приближение на периоде $[-\pi, \pi)$ линейной комбинации двух подряд идущих гармоник $\sin(n+1)t - 2q \sin nt$, $q \in \mathbb{R}$, подпространством тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$. Этот результат представляет собой интегральный аналог известной теоремы Е. И. Золотарева (1868).

В настоящее время имеется несколько способов доказательства указанного факта. Авторами найден еще один вариант доказательства. При этом в случае $|q| \geq 1$ применяются $(2\pi/n)$-периодизация и ортогональность функции $|\sin nt|$ гармонике $\cos t$ на периоде, а в случае $|q| < 1$ — соотношения двойственности для теоремы П. Л. Чебышева (1859) о рациональной функции, наименее уклоняющейся от нуля на отрезке в равномерной метрике.

Исследования поддержаны РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00598) и Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН.

References

1. J. Geronimus *Sur quelques propriétés extrémales polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés*, Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. 1935. Т. 12. С. 49–59.

Россия, Екатеринбург
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский государственный
университет им. А.М.Горького,
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Россия, Москва
Московский энергетический ин-т
(технический ун-т)
e-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Poland, Wroclaw
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Оптимизация приближенного интегрирования многозначных функций

Вера Бабенко, Владислав Бабенко

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество всевозможных компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Для $\forall\, A, B \in \mathcal{K}$ и положительного числа λ положим

$$A + B = \{a + b : \; a \in A, \; b \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

Пусть $d(A, B)$ - метрика во множестве $\mathcal{K}$ обладающая следующими свойствами:

1. $\forall\, A, B, C, D \in \mathcal{K} \;\; d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$,
2. $\forall \lambda > 0, \; \forall A, B \in \mathcal{K} \;\; d(\lambda A, \lambda B) = \lambda d(A, B)$.

Отметим, что этими свойствами обладают многие стандартные для дискретной геометрии метрики - метрика Хаусдорфа, метрика Иглстона, L_p-метрики и др. (определения этих метрик можно найти, напр., в [1])

Пусть $\omega(t)$ некоторый выпуклый вверх модуль непрерывности. Через H_d^ω обозначим класс функций $f : \; [0, 1] \longrightarrow \mathcal{K}$ таких, что

$$\forall\, x, y \in [0, 1] \;\; d(f(x), f(y)) \leq \omega(|x - y|).$$

Данная работа посвящена решению задачи оптимизации приближенного вычисления интегралов от функций $f \in H_d^\omega$, где интегралы от функций $f : \; [0, 1] \longrightarrow \mathcal{K}$ понимаются в смысле работы [2].

Точнее, нами доказано что

$$\inf\left\{\sup_{f\in H_d^\omega} d\left(\int_0^1 f(x)dx, \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)\right) : \ c_k \geq 0, x_k \in [0,1]\right\} \ = \ 2n\int_0^{\frac{1}{2n}} \omega(t)dt,$$

причем inf в левой части доставляют $c_k = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{1}{2n} + \frac{k-1}{n}$, $k = 1, ..., n$.

Это утверждение обобщает известный для числовых функций результат Н.П. Корнейчука [3].

1. P. M. Gruber, *Aspects of Approximation of Convex Bodies*, Handbook of convex geometry, Eds. P.M. Gruber and J.M. Wills (1993), p.319 - 345.

2. Z. Artstein and J.A. Burns, *Integration of compact set-valued functions*, Pacific journal of mathematics, Vol. 58, No. 2 (1975), p. 297-306.

3. Корнейчук Н.П., *Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных*, Матем. заметки 3, вып. 5 (1968), с. 565-576.

Днепропетровский национальный университет
e-mail: vera.babenko@gmail.com

Днепропетровский национальный университет
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Optimal recovery of certain classes of multivariate functions

V.F. Babenko[1], S.V. Borodachov[2,*], D.S. Skorokhodov[3]

Let $\mathcal{L}$ be a full-rank lattice in $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, and $\Pi(\mathcal{L})$ be its fundamental parallelepiped. Denote by $W_{\mathcal{L}}$ the class of continuously differentiable functions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ periodic with respect to lattice $\mathcal{L}$ and such that for every unit vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$, the directional derivative $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}$ exists at least in generalized sense in $\mathbb{R}^d$ and

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}\right\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\Pi(\mathcal{L})}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{r}^2}(\mathbf{x})\right| \leq 1.$$

Let $C_{\mathcal{L}}$ be the space of continuous functions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ periodic with respect to lattice $\mathcal{L}$. Every set of points $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \Pi(\mathcal{L})$ and mapping $\Phi : \mathbb{R}^{(d+1)n} \to C_{\mathcal{L}}$ generate a recovery algorithm for functions from $W_{\mathcal{L}}$ of the form

$$S(f; X, \Phi) = \Phi\left(f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_n), \mathrm{grad} f(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathrm{grad} f(\mathbf{x}_n)\right). \tag{1}$$

For every algorithm of the form (1), denote

$$R(W_{\mathcal{L}}; X, \Phi) = \sup_{f\in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}} \|f - S(f; X, \Phi)\|_\infty.$$

Problem. Given $n \in \mathbb{N}$, find the value

$$R_n(W_{\mathcal{L}}) := \inf_{\substack{X\subset\Pi(\mathcal{L})\\ \#X=n}} \inf_{\Phi} R(W_{\mathcal{L}}; X, \Phi), \tag{2}$$

sets of nodes X_n^*, which attain the infimum on the right-hand side of (2), and optimal algorithms $S(\cdot; X_n^*, \Phi^*)$, if they exist.

Denote by $J(\mathcal{L})$ the minimal length of a non-zero vector in the lattice $\mathcal{L}$ and let

$$\epsilon_n(\mathcal{L}) := \inf_{\substack{X\subset\Pi(\mathcal{L})\\ \#X=n}} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} \operatorname{dist}(\mathbf{x}, X+\mathcal{L}), \tag{3}$$

Theorem. Let $\mathcal{L}$ be a full-rank lattice in $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. If $n \in \mathbb{N}$ is such that $\epsilon_n(\mathcal{L}) < J(\mathcal{L})/2$, then any n-point set of nodes $X_n^* \subset \Pi(\mathcal{L})$, which attains the infimum on the right-hand side of (3), is optimal for recovery of the class $W_{\mathcal{L}}$. In addition,

$$R_n(W_{\mathcal{L}}) = \epsilon_n^2(\mathcal{L})/4 = \theta_d\, |\Pi(\mathcal{L})|^{2/d} n^{-2/d}(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

where θ_d is a constant depending only on d and $|\cdot|$ is the d-dimensional volume.

Let $\mathcal{L}^*$ be the lattice in $\mathbb{R}^2$ generated by vectors $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ and $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Corollary. Let $\mathcal{P}$ be a two-dimensional sublattice of $\mathcal{L}^*$, $k = \#(\mathcal{L}^* \cap \Pi(\mathcal{P}))$, and $n = kN^2$, where $N \in \mathbb{N}$. Set of nodes $X_N = \left(\frac{1}{N}\mathcal{L}^*\right) \cap \Pi(\mathcal{P})$, $N \geq 2$, is optimal for recovery of the class $W_{\mathcal{P}}$ among all configurations of n nodes. In addition, $R_n(W_{\mathcal{P}}) = \frac{k}{12n}$.

Remark. We also describe optimal mappings Φ^* corresponding to optimal sets of nodes and find an asymptotic solution for the non-periodic analogue of problem (2).

[1,3]Dnepropetrovsk National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com
dmitriy.skorokhodov@gmail.com

[2]Towson University
e-mail: sborodachov@towson.edu

Неравенства типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси

В. Ф. Бабенко В. А. Зонтов

Пусть $L_2(R)$ – пространство функций с интегрируемым квадратом, заданых действительной на оси, $\|f\|_2 = \left\{\int\limits_R |f(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$ – норма в $L_2(R)$. Через $S_{m,h}$ обозначим пространство сплайнов порядка m минимального дефекта с узлами lh, $h>0$, $l\in Z$.

Во многих вопросах теории аппроксимации важную роль играют неравенства типа Бернштейна для периодических и непериодических сплайнов.

Точные неравенства типа Бернштейна для L_2 - норм периодических сплайнов получены В.Ф.Бабенко и С.А.Пичуговым (см. [1, §6.3]). Точные оценки типа Бернштейна для L_2 - нормы m-й производной сплайна из $S_{m,h}$ через L_2 - норму самого сплайна получена В.Ф.Бабенко и С.А.Спектор [2]:

$$\|s^{(m)}\|_2 \leq \left(\frac{\pi}{h}\right)^m \sqrt{\frac{K_1}{K_{2m+1}}}\|s\|_2,$$

где K_m – константы Фавара.

Нами получены точные неравенства типа Бернштейна для непериодических сплайнов из $S_{m,h}$ при всех $k = 1, \ldots, m-1$:

$$\forall\, s \in S_{m,h} \cap L_2(R) \quad \|s^{(k)}\|_2 \leq \left(\frac{\pi}{h}\right)^k \sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}} \|s\|_2.$$

Получены также некоторые уточнения этих неравенств.

References

1. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, Экстремальные свойства полиномов и сплайнов.- Киев, Наукова думка, 1992.

2. В. Ф. Бабенко, С. А. Спектор, *Неравенства типа Бернштейна для сплайнов в пространстве* $L_2(R)$, Вiсник Днiпропетровського унiверситету, т. 16, N 6/1, 2008, с. 21 -27.

Dnepropetrovsk National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Dnepropetrovsk National University
e-mail: vladimir.zontov@mail.ru

О неравенствах типа Колмогорова для функций, заданных на полуоси

Владислав Бабенко и Олег Коваленко

Пусть X есть $C(\mathbb{R}_+)$ или $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $f \in C(\mathbb{R}_+)$ – положительная невозрастающая функция. Для $x \in X$ положим

$$\|x\|_{X,f} := \left\| \frac{x(\cdot)}{f(\cdot)} \right\|_X .$$

Для невозрастающих положительных функций $f, g \in C(\mathbb{R}_+)$ и натурального r положим

$$L^r_{f,g} := \left\{ x \in C(\mathbb{R}_+) : \|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f} < \infty,\, x^{(r-1)} \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}},\, \|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g} < \infty \right\},$$

$$W^r_{f,g} := \left\{ x \in L^r_{f,g} : \|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g} \leq 1 \right\}.$$

Модулем непрерывности оператора k–кратного дифференцирования на классе $W^r_{f,g}$ $(k = 1, 2, ..., r-1)$ называется функция

$$\omega(\delta) := \sup_{x \in W^r_{f,g},\, \|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f} \leq \delta} \|x^{(k)}\|_C,\ \delta \geq 0. \tag{1}$$

Нами изучена функция (1), а также аналогичная функция в случае, когда нормы $\|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f}$ и $\|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g}$ заменяются несимметричными нормами. Получены результаты обобщающие известные результаты Шенберга и Каваретты (см. например [1]) и Бабенко, Кофанова и Пичугова (см. например [2]).

References

1. Shoenberg I.J., Cavaretta A., *Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on halfline*, Proc. of Conf. on Approx. Theory.-Varna, Sofia, 1972, 297–308.

2. Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А., *О неравенствах типа Ландау – Колмогорова – Хермандера на полуоси*, Мат. заметки, **65**, №2 (1999), 175–185.

Днепропетровский национальный университет
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Днепропетровский национальный университет
e-mail: olegkovalenko90@gmail.com

Интерполяция непрерывных многозначных отображений кусочно-линейными

В.Ф. Бабенко, М.В. Куликова

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство точек $x=(x_1,...,x_n)$; $|x-y|$ – евклидово расстояние между точками $x,y\in\mathbb{R}^n$. Через $K(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать совокупность всех компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Для $A,B\in K(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha\in\mathbb{R},\alpha\geq 0$ положим $A+B=\{a+b\,:\,a\in A,\ b\in B\}$, $A=\{\alpha a: a\in A\}$. Будем также предполагать, что в $K(\mathbb{R}^n)$ введена метрика $d(A,B)$, обладающая следующими свойствами: 1) $\forall A,\ B,\ C,\ D\ \in\ K(\mathbb{R}^n)\quad d\left(A+B,C+D\right)\ \leqslant\ d\left(A,C\right)+d\left(B,D\right)$; 2) $\forall A,\ B\ \in\ K(\mathbb{R}^n)$, $\forall\lambda>0\quad d\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda d\left(x,y\right)$. Отметим, что условиям 1), 2) удовлетворяют активно изучающиеся в дискретной геометрии метрика Хаусдорфа, метрика Иглстона (и ряд ее обобщений), L_p-метрики, определяемые с помощью опорных функций выпуклых множеств, подробнее об этом см., например, в [1]. Пусть далее P – компактный m-мерный полиэдр в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Для заданного выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ через H_P^ω обозначим совокупность функций $f\,:\,P\rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\forall x,y\in P\ d\left(f(x),f(y)\right)\leq\omega\left(|x,y|\right)$. Если T – симплициальное разбиение полиэдра P, T_0 – множество его вершин, то каждой функции $f\in H_P^\omega$ поставим в соответствие отображение $l_T(f):P\rightarrow K(\mathbb{R}^n)$, сужение которого на симплекс $S\in T$ с вершинами $a^1,a^2,...,a^{m+1}$ определяется следующим образом: $l_T(f,x)=\sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i f(a^i)$, если $x=\sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i a^i$, $\sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geq 0$. Радиус покрытия $r(S)$ симплекса S есть, по определению, наименьшее такое число r, что шары радиуса r с центрами в вершинах S покрывают симплекс S; $r(T)=\max\limits_{S\in T}r(S)$. Пусть $E_T\left(H_P^\omega\right)=\sup\limits_{f\in H_P^\omega}d\left(f\left(x\right),l_T\left(f,x\right)\right)$.

Теорема. $E_T\left(H_P^\omega\right)=\omega(r(T))$.

Эта теорема обобщает известные результаты о кусочно-линейной интерполяции непрерывных функций для $f:P\rightarrow R^m$, полученные при $n=m=1$ в [2], при $n=1$, $m=2$ в [3], а при $m,n\in N$ в [4].

Литература

1. P. M. Gruber, J. M. Wills, Handbook of convex Geometry. Amsterdam: North-Holland, 1993. Chapter 1.10, pages 319–345.

2. В. Н. Малоземов, *Об отклонении ломаних,* Весник ЛГУ., **7** (1966), 150–153.

3. В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Об интерполяции многогранными функциями,* Математические заметки., **18** (1975), 803–814.

4. В. Ф. Бабенко, *Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными,* Математические заметки., **24** (1978), 43–50.

Dnepropetrovsk National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Dnepropetrovsk National University
e-mail: kulikova.mariya@gmail.com

Равнораспределенная рельефная аппроксимация некоторых классов гармонических функций

В. Ф. Бабенко[*,**], Д. А. Левченко[*]

Пусть $\mathbb{B}^2$ — единичный круг на плоскости, а $C(\mathbb{B}^2)$ — пространство непрерывных функций $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ с нормой
$$\|f\|_C := \sup_{x\in\mathbb{B}^2} |f(x)|\,.$$

Для произвольного натурального n введем в рассмотрение множество рельефных функций
$$\mathcal{R}_n^{eq} := \left\{ R(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x\cdot\theta_j) : \theta_j = \left\langle \cos\frac{\pi j}{n}, \sin\frac{\pi j}{n} \right\rangle,\ j = 0,\dots,n-1 \right\}.$$
Здесь $W_j(t), t\in\mathbb{R}$ — функции одной действительной переменной, а $x\cdot\theta_j$ обычное скалярное произведение векторов $x\in\mathbb{R}^2$ и θ_j. Через $\mathcal{P}_n^2$ обозначим подпространство алгебраических многочленов степени n от двух переменных.

Наилучшее приближение множества $\mathfrak{M}\subset C(\mathbb{B}^2)$ подпространством $H\subset C(\mathbb{B}^2)$ определяется так
$$E(\mathfrak{M},H) := \sup_{f\in\mathfrak{M}} E(f,H) = \sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{u\in H}\|f-u\|_C\,.$$

Через W_∞^r $(r=1,2,\dots)$ обозначим класс $2\pi-$периодических функций $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, которые имеют абсолютно непрерывную производную порядка $(r-1)$ и существенно ограниченную единицей производную $r-$го порядка.

Пусть $\omega(t)$ модуль непрерывности, т.е. непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0,\infty)$ функция, в нуле равная нулю. Для выбранного модуля непрерывности определим W^rH^ω $(r=1,2,\dots)$ — класс $2\pi-$периодических функций $f(t)$, для которых
$$|f^{(r)}(t') - f^{(r)}(t'')| \le \omega(|t'-t''|), \quad \forall t',t''\in\mathbb{R}.$$
Пусть $X_{2\pi}$ есть W_∞^r или W^rH^ω. Каждая функция $f\in X_{2\pi}$ задает функцию $g: S^1\longrightarrow\mathbb{R}$ так (S^1 — единичная окружность), $g(\cos\varphi,\sin\varphi) := f(\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Теперь каждую такую функцию g продолжим гармонически во внутренность круга $\mathbb{B}^2$ и обозначим класс полученных функций через $X_{2\pi}^H$. Нами доказана

Теорема. *Пусть r, n натуральные, $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности и множество $X_{2\pi}$ есть W_∞^r или W^rH^ω. Тогда*
$$E(X_{2\pi}^H,\mathcal{R}_n^{eq}) = E(X_{2\pi}^H,\mathcal{P}_n^2) = E_n(X_{2\pi}),$$

где $E_n(X_{2\pi})$ — наилучшее равномерное приближение класса $X_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$.

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, e-mail:spline_2009@ukr.net

**Институт прикладной математики и механики НАН Украины, e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Приближение некоторых классов функций многих переменных кусочно-гармоническими сплайнами

В.Ф. Бабенко, Т.Ю. Лескевич

В пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $x=(x_1,...,x_n)$ рассмотрим область $\Omega=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$, $a_i<b_i$, $i=1,...,n$. Через $\overline{\Omega}$ будем обозначать ее замыкание, через $\partial\Omega$ – границу.

На области Ω зададим сетку путем разбиения каждого интервала (a_i,b_i), $i=1,..,n$ точками вида $a_i=x_i^0<x_i^1<...<x_i^{n_i}=b_i$. Данная сетка порождает разбиение Ω на области вида $\Omega_{\overline{j}}=\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^{j_i-1},x_i^{j_i})$, где $\overline{j}=(j_1,..,j_n)$, $j_i=1,...,n_i$, $i=1,...,n$.

Рассмотрим класс функций $W^\Delta=\{f\in C(\overline{\Omega}):\|\Delta f\|_{L_\infty(\Omega)}\le 1\}$, где оператор Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ понимается в смысле Соболева.

Каждой функции $f\in W^\Delta$ поставим в соответствие кусочно-гармоническую функцию (кусочно-гармонический сплайн) $S(f,x)$, полагая

$$S(f,x)=S_{\overline{j}}(f,x),\ \ x\in\Omega_{\overline{j}},$$

где функция $S_{\overline{j}}(f,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta S_{\overline{j}}(f,x)=0,\ \ x\in\Omega_{\overline{j}},$$

и краевому условию

$$S_{\overline{j}}(f,x)|_{\partial\Omega_{\overline{j}}}=f(x)|_{\partial\Omega_{\overline{j}}}.$$

Нами найдены точные значения следующих величин

$$\sup_{f\in W^\Delta}\|f(\cdot)-S(f,\cdot)\|_{L_p(\Omega)}$$

при всех $p\in[1;\infty]$. В частности доказано, что

$$\sup_{f\in W^\Delta}\|f(\cdot)-S(f,\cdot)\|_{L_p(\Omega)}=\|F(\cdot)-S(F,\cdot)\|_{L_p(\Omega)},$$

где $F(x)=\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.

При $n=2$ и $p=\infty$ наши результаты уточняют и дополняют результаты В.Т. Клименко [1].

Литература

1. В.Т. Клименко, *Аппроксимация гармоническими сплайнами функций двух переменных,* Украинский математический журнал, **9** (1995), 1190–1196.

Днепропетровский национальный университет
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Днепропетровский национальный университет
e-mail: tleskevich@gmail.com

Поведение точных констант в неравенствах типа Джексона для несимметричных приближений

В.Ф. Бабенко, А. А. Лигун, В. Г. Доронин

Пусть $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ — пространство 2π-периодических измеримых функций $f(x)$ с соответствующими нормами $\|f\|_p = \left\{\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p}$, $\|f\|_\infty = vraisup|f(t)|$; $K * \varphi$ – свертка функций $K \in L_1$ (ядро свертки) и $\varphi \in L_1$;

$E^{\alpha,\beta}(f; H)_p$ — наилучшее (α, β) –приближение функции $f \in L_p$ множеством H в пространстве L_p;

$\omega_m(f, \delta)_p$ – m–й интегральный модуль гладкости функции f в пространстве L_p.

Наименьшую возможную константу χ в неравенстве типа Джексона:

$$E^{\alpha,\beta}(a + K * \varphi; H)_p \leq \chi\, \omega_m(\varphi; \delta)_q \ (a \in R, \varphi \in L_q, \varphi \perp 1),$$

обозначим через

$$\chi_m^{\alpha,\beta}(H, K; \delta)_{p,q}.$$

Теорема. *Пусть* $1 \leq p, q \leq \infty$); K *– непрерывное ядро,* $K \perp 1$; H *– подпространство пространства* L_p *, содержащее константы. Тогда при* $\delta \to 0$

$$\chi_m^{\alpha,\beta}(H, K; \delta)_{p,q} \asymp \left\{\frac{1}{\delta}\right\}^m \ E^{\alpha,\beta}(K * B_m * F_q; H)_p, \quad (m = 1, 2),$$

где F_q *-единичный шар в* L_q*, а* B_m *- ядро Бернулли порядка* m*.*

Следовательно, порядок роста точных констант в неравентсвах типа Джексона существенно зависит от порядка модуля гладкости.

В.Ф.Бабенко
Днепропетровский национальный университет
babenko.vladislav@gmail.com

А.А.Лигун
Днепродзержинский государственный технический университет

В.Г.Доронин
Днепропетровский национальный университет

Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных Рисса функций многих переменных

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов

Пусть $C(R^m), m \in N,$ – пространство ограниченных непрерывных функций $f : R^m \to R$ со стандартной sup-нормой.

$L_\infty(R^m)$ – пространство измеримых существенно ограниченных функций $f : R^m \to R$ с соответсвующей нормой $\|f\|_{L_\infty(R^m)}$.

Обозначим через $L_\infty^\Delta(R^m)$ класс функций $f \in C$, для которых значения оператора Лапласа

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

принадлежат пространству $L_\infty(R^m)$. При этом Δf понимается в смысле Соболева.

Дробная производная Рисса порядка α $(0 < \alpha < 2)$ функции f определяется равенством

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,2}(\alpha)} \int\limits_{R^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

где $d_{n,2}(\alpha)$ – нормирующий множитель. Известно, что производная Рисса реализует дробную степень $\alpha/2$ оператора $(-\Delta)f$.

Пусть функция $\psi(\rho)$, $\rho \geq 0$, определяется следующим образом

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m}[\rho^2 - 1/\delta^2 - G(1/\delta) + 1/2], & 0 \leq \rho < 1/\delta, \\ \frac{1}{2m}[-\rho^2 - 2G(\rho) + 1/\delta^2 + G(1/\delta) + 1/2], & 1/\delta < \rho \leq 1, \\ \psi(1), & \rho > 1, \end{cases}$$

где $G(|y|) = \frac{1}{m-2}\left(\frac{1}{|y|^{m-1}} - 1\right)$, $\delta = \sqrt[m]{2}$.

Теорема. Для $f \in L_\infty^\Delta(R^m)$ при $0 < \alpha < 2$ имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha f\|_{C(R^m)} \leq \frac{1}{d_{n,2}(\alpha)} \cdot \frac{\|D^\alpha \varphi\|_{C(R^m)}}{2^{1-\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|_{C(R^m)}^{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \|f\|_{C(R^m)}^{1-\frac{\alpha}{2}} \|\Delta f\|_{L_\infty(R^m)}^{\frac{\alpha}{2}},$$

где $\varphi(x) = \psi(|x|)$.

Аналогичные точные неравенства получены также для потенциалов Рисса. Даны приложения этих неравенств в теории аппроксимации.

В.Ф.Бабенко
Днепропетровский
национальный
университет
babenko.vladislav@gmail.com

Н.В.Парфинович
Днепропетровский
национальный
университет
nparfinovich@yandex.ru

С.А.Пичугов
Днепропетровский
национальный
университет

Задача Колмогорова для трех чисел в нормированных пространствах

В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, Д. С. Скороходов

Пусть X, Y, Z – нормированные пространства; $A : X \to Y$ и $B : X \to Z$ – линейные операторы с областями определения $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(B)$ соответственно, причем $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. Нами изучается задача Колмогорова для трех чисел, состоящая в нахождении необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять три заданных положительных числа M_0, M_A и M_B для того, чтобы существовал такой элемент $x \in \mathcal{D}(B)$, что

$$\|x\|_X = M_0, \qquad \|Ax\|_Y = M_A, \qquad \|Bx\|_Z = M_B. \tag{2}$$

Для $\xi > 0$ рассмотрим величину

$$m(\xi) := \inf\left\{\|x\|_X \;:\; x \in \mathcal{D}(B),\ \|Ax\|_Y = \xi,\ \|Bx\|_Z = 1\right\}.$$

В частности, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства; $A : X \to Y$ и $B : X \to Z$ – линейные операторы с областями определения $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. Пусть также $\ker A \cap \ker B \neq \{0\}$ и величина $m(\xi)$ отлична от нуля хотя бы при одном $\xi > 0$. Тогда для любых положительных чисел M_0, M_A и M_B, для которых $M_0 > M_B m\left(M_A/M_B\right)$, существует элемент $x \in \mathcal{D}(B)$, для которого выполнены равенства (2).

Эта теорема, по-существу, сводит решение задачи Колмогорова для трех чисел к решению вопроса о существовании элементов $x \in \mathcal{D}(S)$, реализующих инфимум в определении величины $m(\xi)$.

В ситуации, когда $X = Y = Z = L_2$ – пространство интегрируемых в квадрате 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt}$, а A и B – операторы k-кратного и r-кратного дифференцирования, нами показано, что решение задачи Колмогорова дается следующим утверждением.

Теорема 2. Пусть $k, r \in N$, $1 \le k \le r-1$. Тогда для трех положительных чисел M_0, M_k и M_r существует функция $x \in L_2$, для которой $\|x\|_2 = M_0$, $\left\|x^{(k)}\right\|_2 = M_k$, $\left\|x^{(r)}\right\|_2 = M_r$, тогда и только тогда, когда для некоторого $n \in N$ выполнены неравенства: $n^{r-k} \le M_r/M_k \le (n+1)^{r-k}$ и

$$M_0 \ge M_r \frac{\sqrt{\frac{n^{2k-2r} - (M_k/M_r)^2}{(n+1)^{2r}} + \frac{(M_k/M_r)^2 - (n+1)^{2k-2r}}{n^{2r}}}}{\sqrt{n^{2k-2r} - (n+1)^{2k-2r}}}.$$

Днепропетровский национальный
университет им. О. Гончара
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Днепропетровский национальный
университет железнодорожного
транспорта им. акад. В. Лазаряна

Днепропетровский национальный
университет им. О. Гончара
e-mail: dmitriy.skorokhodov@gmail.com

Задачи масштабирования изображений.

В.Ф.Бабенко, А.А.Руденко.

Под масштабированием понимается как увеличение, так и уменьшение размеров растровых изображений. В настоящее время широко используются следующие алгоритмы масштабирования: метод копирования ближайшего пиксела, заменяющий каждый пиксель четырьмя пикселями того же цвета, линейная (или билинейная) интерполяция, бикубическая интерполяция. В [1] рассмотрены алгоритмы, основанные на наилучшем приближении кусочно постоянных фунций в пространствах Lp. При масштабировании используются также всевозможные фильтры (см.,например,[2]).

В результате масштабирования могут возникать нежелательные эффеты, например, лестничный или муара. В связи с этим представляется актуальной задача оценки качества масштабирования изображения. Нами рассмотрены способы оценки, основанные на двумерном преобразовании Фурье в комбинации с пиковым отношением сигнала к шуму PSNR (см.,напр,[3]).

1. В.Ф.Бабенко, А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.Н.Плужник. Об одном подходе к использованию вейвлет для масштабирования изображений.//Проблеми математичного моделювання. Дніпродэержинськ 2003. с13.

2. Ричард Лайонс Цифровая обработка сигналов: второе издание = Understanding digital signal processing, 2nd edition. — Бином-Пресс, 2006. — 656 с. — ISBN 5-951-80149-4.

3. Huynh-Thu, Q.; Ghanbari, M. (2008). "Scope of validity of PSNR in image/video quality assessment". Electronics Letters 44: 800–801.

Dnepropetrovsk National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Dnepropetrovsk National University
e-mail: AA-Rudenko@yandex.ru

О точности неравенств типа Джексона-Черныха для аппроксимации в гильбертовых пространствах

Владислав Бабенко и Светлана Савела

В теории приближения хорошо известны точные неравенства типа Джексона-Черныха для аппроксимации суммируемых с квадратом функций тригонометрическими полиномами, целыми функциями экспоненциального типа, частными суммами рядов по системе вейвлет Шеннона-Котельникова и Мейера. В ряде работ неравенства такого типа были получены для аппроксимации элементов гильбертова пространства целыми векторами экспоненциального типа, соответствующими заданному самосопряженному оператору, а также подпространствами, порожденными заданным разложением единицы. Однако, точность этих неравенств в случае произвольного гильбертова пространства не была изучена.

Нами предлагаются условия, обеспечивающие неулучшаемость неравенств для наилучших приближений элемента гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы. В частности, нами доказано следующее:

Пусть H-комплексное гильбертово пространство, в котором задано разложение единицы E_s $(-\infty < s < \infty)$. Будем рассматривать оценки наилучшего приближения элементов $f \in H$ подпространствами вида

$$W_\sigma = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\sigma} dE_s g : g \in H \right\}, \qquad \sigma > 0,$$

то есть величины $E_\sigma(f) = \inf\limits_{g \in W_\sigma} \|f - g\|$.

Для $t \leq 0$ определим функцию $\omega\,(f;t) = \sup\limits_{|\delta| \leq t} \|U_\delta f - If\|$, которая является естественным аналогом модуля непрерывности функции f из пространства L_2.

Теорема. Для произвольного элемента $f \in H$ и любого $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$E_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f; \frac{\pi}{\sigma}\right).$$

Если разложение единицы таково, что для заданного σ, любого положительного ε и произвольного натурального ν $E_{\nu\sigma+\varepsilon} - E_{\nu\sigma} \neq 0$, то неравенство является неулучшаемым.

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: ssvet05@mail.ru

Неравенства типа Колмогорова для L_p-норм дробных производных

Владислав Бабенко и Мария Чурилова

Пусть $\omega(t)$ - некоторый модуль непрерывности. Через $H_p^\omega\,(R_+)$, обозначим множество функций $x \in L_p\,(R_+)$, для которых

$$\|x\|_{H_p^\omega(R_+)} := \sup_{t \in \mathrm{R},\, t>0} \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{L_p(R_+)}}{\omega\,(t)} < \infty.$$

Правосторонняя производная $D_-^\alpha x$ в смысле Маршо [1] для функций $x : R_+ \to R$ определяется следующим образом:

$$(D_-^\alpha x)(u) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{x(u) - x(u+t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Теорема. Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ и число $\alpha \in (0,1)$ таковы, что выполняется условие

$$\int_0^1 \frac{\omega\,(u)}{u^{1+\alpha}} du < \infty. \tag{3}$$

Тогда для любой функции $x \in H_p^\omega(R_+)$ и любого $h > 0$ справедливо неравенство

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)} \leq \left\|D_{-,h}^\alpha x\right\|_{L_p(R_+)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \|x\|_{H_p^\omega(R_+)} \int_0^h \frac{\omega\,(u)}{u^{1+\alpha}} du. \tag{4}$$

В случае, когда $p = 1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ является локально абсолютно непрерывной функцией, неравенство (4) является точным.

В этой теореме $D^{\alpha}_{-,h}x$ - так называемая усеченная дробная производная Маршо. Аналогичный результат получен и для функций, заданных на всей оси.

Библиографические ссылки

1. A. Marchaud, *Sur de derivees et sur les differences des fonctions de variables reelles,* J. Math. Pures et Appl., **6** (1927), 337–425.

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: churilova-m@yandex.ru

Приближение псевдодифференциальных операторов на классах периодических функций многих переменных

Дауренбек Базарханов

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_k = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ положим $xy = x_1y_1 + ... + x_ky_k$, $|x|_\infty = \max\{\, |x_\kappa| \,:\, \kappa = 1, \ldots, k\,\}$.

Пусть $1 \le p,\, q \le \infty$; $L_p = L_p(\mathbb{T}^k)$ — пространство функций $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — k-мерном торе, с нормой $\|f \,|\, L_p\|$; $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^k} f(x) e^{-2\pi i\,\xi x} dx$, $\xi \in \mathbb{Z}^k$, — тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$; ℓ_q — пространство числовых последовательностей $(c_\alpha) = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой $\|(c_\alpha) \,|\, \ell_q\,\|$. Пусть $n \in \mathbb{N}$: $n \le k$. Фиксируем мультииндекс $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $m_1 + \cdots + m_n = k$ (если $n = 1$, то $m = k$, если $n = k$, то $m = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^k$). Представим $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, ..., x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; здесь $\kappa_0 = 0, \kappa_\nu = m_1 + ... + m_\nu, \nu \in \mathrm{z}_n$. Выберем функции $\eta_0^\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^{m_\nu})$ такие, что $0 \le \eta_0^\nu(\xi^\nu) \le 1$, $\xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\eta_0^\nu(\xi^\nu) = 1$, если $|\xi^\nu|_\infty \le 1$; $\eta_0^\nu(\xi^\nu) = 0$, если $|\xi^\nu|_\infty \ge 3/2\, (\nu \in \mathrm{z}_n)$. Положим $\eta^\nu(\xi^\nu) = \eta_0^\nu(2^{-1}\xi^\nu) - \eta_0^\nu(\xi^\nu)$, $\eta_j^\nu(\xi^\nu) = \eta^\nu(2^{-j+1}\xi^\nu), j \in \mathbb{N}$; $\eta_\alpha(\xi) = \prod_{\nu=1}^n \eta_{\alpha_\nu}^\nu(\xi^\nu)$, $\xi \in \mathbb{R}^k$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Определение. *Пусть* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $1 \le p, q \le \infty$. *Пространство типа Никольского–Бесова* $\mathbf{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, \mathbf{B}\,\| \;=\; \|\big(2^{\alpha s}\| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \eta_\alpha(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \,|\, L_p\,\|\big) \,|\, \ell_q\,\|.$$

Пространство типа Лизоркина–Трибеля $\mathbf{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ $(p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, \mathbf{L}\,\| \;=\; \|\|\big(2^{\alpha s} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \eta_\alpha(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\big) \,|\, \ell_q\,\| \,|\, L_p\,\|.$$

Единичные шары $B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *и* $L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *этих пространств будем называть классами типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля соответственно.*

В докладе будут представлены характеризации (с соответствующими эквивалентными нормировками) пространств $\mathbf{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ и $\mathbf{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ с помощью всплесков, а также оценки приближенного восстановления специальных псевдодифференциальных операторов "типа произведения" на классах $B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ и $L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$.

Институт математики Алматы
e-mail: dauren-math@yandex.ru

Восстановление оператора дифференцирования на периодических классах Никольского-Бесова по информации о коэффициентах Фурье

Шолпан Балгимбаева

Рассматривается задача оптимального восстановления оператора дифференцирования $L := \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R},\ \alpha < s)$ на единичном шаре периодического пространства Никольского-Бесова $B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$; $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. В качестве информации о функциях $f \in B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ используется набор коэффициентов Фурье $I_\sigma \hat{f} := \{\hat{f}(k) :\ |k| \leq \sigma\}$, $\sigma > 0$; здесь $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Для построения метода приближенного восстановления оператора L используется система (типа всплесков) тригонометрических полиномов $\Phi = \{\phi_{00}, \phi^\varepsilon_{mr}, (m, r, \varepsilon) \in \mathrm{M}\}$, $\mathrm{M} = \{(m, r, \varepsilon) :\ m \geq 1,\ r = 0, ..., 2^{m-1} - 1;\ \varepsilon = \pm 1\}$:

$$\phi_{00} = 1,\ \phi^\varepsilon_{mr} = 2^{-m} \sum_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} e^{ik(x - t_{rm})},\quad t_{rm} = \frac{2r+1}{2^{m-1}}\pi,\ (m, r, \varepsilon) \in \mathrm{M},$$

которая является безусловным базисом для пространства $B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ при $1 < p, \theta < \infty$ [1]; при этом функция $f \in B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ представима в виде ряда

$$f(x) = \phi_{00} + \sum_{(m,r,\varepsilon) \in \mathrm{M}} \hat{f}^\varepsilon_\varphi(m, r) \phi^\varepsilon_{mr}(x),$$

где $\hat{f}^\varepsilon_\varphi(m, r) = \sum\limits_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} e^{ikt_{rm}}$.

Найден точный порядок погрешности оптимального восстановления, при этом линейным оптимальным по порядку методом восстановления является действие оператора L на соответствующую частную сумму ее разложения в ряд по системе Φ.

Отметим, что аналогичные построения верны в многомерном случае: для $B^s_{p\theta}(\mathbb{T}^n)$ и $L := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $0 < |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n < s$, и оператора информации $I_\sigma \hat{f} = \{\hat{f}(k) \,|\, k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n :\ k_\nu < \sigma,\ \nu = 1, ..., n\}$. Для построения оптимального по порядку метода восстановления используется многомерный аналог системы Φ из [2].

Литература

1. П. И. Лизоркин, *О базисах и мультипликаторах в пространствах $B^r_{p,\theta}(\Pi)$,* Труды МИ АН СССР, **143** (1977), 88–104.

2. D. G. Orlovskii, *On multipliers in the spaces,* Analysis Mathematica, **5** (1979), 207–218.

Institute of Mathematics, Almaty
e-mail: sholpan@math.kz

Интегральное приближение линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного

Н.А.Барабошкина

Пусть $\Pi_{q,\alpha}(t) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \dfrac{\alpha\pi}{2}\right) = \left(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) P(t) + \left(\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) Q(t)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \le q < 1$, $P(t) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ — ядро Пуассона, $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$ — сопряженное ядро Пуассона.

Рассматривается задача интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, т. е. задача нахождения величины

$$\sigma_{q,\alpha}(n) = \min_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1}} \|\Pi_{q,\alpha} - \tau\|_L = \|\Pi_{q,\alpha} - \tau^*\|_L \tag{1}$$

и полинома $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения для функции $\Pi_{q,\alpha}$. Здесь норма в $L = L[0, 2\pi]$ задается обычным образом: $\|f\|_L = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$.

С. Н. Бернштейн (1930) фактически указал полином τ^*, который реализует минимум в (1) в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. В 1938 г. М. Г. Крейн и Б. Надь нашли явные формулы для $\sigma_{q,0}(n)$ и $\sigma_{q,1}(n)$ соответственно, а именно,

$$\sigma_{q,0}(n) = 4 \arctan q^n, \qquad \sigma_{q,1}(n) = 2 \ln \frac{1+q^n}{1-q^n}.$$

Отсюда автоматически получается формула для $\sigma_{q,\alpha}(n)$ при всех целых α.

В общем случае ($\alpha \in \mathbb{R}$) А. В. Бушанский (1975) установил, что существует вещественное число $\xi = \xi(\alpha, q, n)$ такое, что экстремальный полином τ^* интерполирует функцию $\Pi_{q,\alpha}$ в нулях функции $\sin n(t-\xi)$, при этом

$$\sigma_{q,\alpha}(n) = 4 \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\xi - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right|,$$

где ξ является корнем уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\xi - \frac{\alpha\pi}{2}\right) = 0. \tag{2}$$

Другим способом этот факт доказал В. Т. Шевалдин (1992).

Нами найдены решение уравнения (2)

$$\xi = \arcsin \frac{(q^{2n} - 1)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos\alpha\pi + q^{4n}}},$$

а также еще одна формула для величины (1)

$$\sigma_{q,\alpha}(n) = \frac{8\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos\alpha\pi + q^{4n}}}{1 - q^{4n}} \left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2 - 1} \cos 2k\xi \right).$$

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00213).

Россия, Екатеринбург
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nata-npc@2-u.ru

Некоторые задачи теории аппроксимации для степеней нормальных операторов в гильбертовом пространстве

Р. О. Биличенко

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, A — линейный, неограниченный, нормальный оператор в H, $D(A)$ – область его определения, k, r — натуральные числа ($k < r$). Пусть также $\mathfrak{L}(N)$ — множество линейных ограниченных операторов $T : H \to H$, нормы которых не превышают числа $N > 0$.

Задача Стечкина приближения неограниченного оператора A^k линейными ограниченными операторами на классе $Q = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ состоит в вычислении величины

$$\varepsilon(N) = \inf_{T \in \mathfrak{L}(N)} \sup_{x \in Q} \|A^k x - Tx\|. \tag{1}$$

Задача наилучшего приближения класса $F = \left\{x \in D\left(A^{r-k}\right) : \|A^{r-k}x\| \le 1\right\}$ классом NQ, $N > 0$, состоит в вычислении величины

$$\varepsilon(F, NQ) = \sup_{u \in F} \inf_{x \in NQ} \|u - x\|. \tag{2}$$

Следующая теорема дает решение задач (1), (2).

Теорема. Пусть k, r – натуральные, $k < r$, и A – неограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве H. Если оператор A таков, что

$$E_{B_t \setminus B_s} D(A^{2r}) \ne \{\theta\} \qquad (s, t \text{ – действительные}, 0 \le\ s <\ t \le\ \infty),$$

где $B_j = \{z : |z| \le j, j = s, t\}$ — круг комплексной плоскости, E – разложение единицы, соответствующее оператору A (подробнее см. [1, гл XIII]), то для любого $N > 0$

$$\varepsilon(N) = \varepsilon(F, NQ) = \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Литература

[1] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. – К., 1990. - 600 с.

Днепропетровский национальный
университет
e-mail: bilichenkoroma@rambler.ru

Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Дмитро Боднар, Оксана Баран

Об'єктом дослідження є функціональний гіллястий ланцюговий C- дріб (ГЛД) з нерівнозначними змінними

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{1}$$

де $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ – мультиіндекс, $i(k) \in I$,

$$I = \left\{ i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k, 1 \le i_p \le i_{p-1}, p = \overline{1,k},\, k = 1, 2, \ldots,\, i_0 = N \right\},$$

N – кількість гілок розгалужень, $N \ge 2$, $a_{i(k)}$ – комплексні числа,
$z = (z_1, z_2, \ldots z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Розіб'ємо множину I на три підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, які попарно не перетинаються:

$$I_1 = \{ i(k) : i(k) \in I,\, l = 1,\, k = 1, 2, \ldots \},$$

$$I_2 = \{ i(k) : i(k) \in I,\, l - \text{ парне},\, l > 1,\, k = 2, 3, \ldots \},$$

$$I_3 = \{ i(k) : i(k) \in I,\, l - \text{ непарне},\, l > 1,\, k = 3, 4, \ldots \},$$

де $l = \sum\limits_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}$ – кількість повторів індекса i_k в мультиіндексі $i(k) \in I$, $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера.

Теорема. ГЛД (1) рівномірно збігається в замкненій області

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}^N, \alpha \le |z_p| \le \beta,\, p = \overline{1,N} \right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(z)$, якщо елементи дробу $a_{i(k)}$– комплексні числа, які задовольняють умови

$$\left| a_{i(k)} \right| \le \begin{cases} \dfrac{r_1/\beta}{i_{k-1} - 1}, & \text{якщо } i(k) \in I_1; \\ r/\beta, & \text{якщо } i(k) \in I_3; \end{cases}$$

$$\left| a_{\,i(k)} \right| \ge \frac{1}{\alpha} \left(2 + r_1 \right) \left(1 + r_1 + r \right), \text{ якщо } i(k) \in I_2,$$

$0 < r_1 < \dfrac{1 - 3r}{1 + r}$, $0 < r < \dfrac{1}{3}$, і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f(z) - f_m(z)| \le M C_{N+m}^{N-1} q^{m+1},$$

де $f_m(z)$ – m-ий підхідний дріб ГЛД (1), $M = \left(\dfrac{r_1}{r} \right)^p$, $p = i_1 - i_{m+1} + 1$, $1 \le p \le N$, $q = \sqrt{\dfrac{(2 + r_1) r}{1 - r_1 - r}}$.

Тернопільський національний
економічний університет
e-mail: dmytro_bodnar@hotmail.com

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАНУ
e-mail: boe13@ukr.net

Про збіжность одноперіодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Д.Боднар, М.Бубняк, О.Ковальчук

Періодичні неперервні дроби були об'єктом досліджень Д. Бернуллі, А. Прінгсгейма, О.Перрона, Т.Тіле, Е.Галуа, Р. Лейна, Л.Лорентсен та ін. Ознаки збіжності цих дробів використовувались для побудови різних контрприкладів, зокрема, при доведенні необхідності багатьох ознак збіжності неперервних дробів.

Сучасні підходи до побудови теорії k-періодичних неперервних дробів, які використовують класифікацію нерухомих точок або узагальнення поняття збіжності, наведені в [2, 3].

У вигляді періодичних гіллястих ланцюгових дробів були представлені розв'язки алгебраїчних рівнянь вищих степенів ($n \geq 3$) в роботах П.І.Боднарчука, М.О.Недашковського. Однак, питання збіжності, оцінок похибок, апроксимації таких дробів не розглядались. Не означено також загальних контсрукцій періодичних ГЛД. Відмітимо, що одноперіодичний гіллястий ланцюговий дріб еквівалентний періодичному неперервному дробові.

Розглянемо одноперіодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду:

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{5}$$

де $a_{i_k} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i_k \leq i_{k-1}$; $k = 1, 2, \ldots$; $i_0 = N-$ натуральне число.

Дріб (5) збігається, якщо існує скінченна границя послідовності підхідних дробів $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$F_n = \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i_k}}{1}\right)^{-1}.$$

Теорема. *Якщо елементи дробу (5) задовольняють умови:* $a_k \in P_k(\gamma)$ $(k = \overline{1, N})$, *де*

$$P_k(\gamma) = \left\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| - Re(\omega e^{-i\gamma}) \leq 2p_k \cos^2 \frac{\gamma}{2}\right\}$$

і $-\pi < \gamma < \pi$; $p_k = \dfrac{1}{2N}\left(1 - \dfrac{k}{2N}\right)$.

Тоді

1) дріб (5) збігається;

2)областю значень дробу (5) є круг:

$$K(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{e^{-i\gamma/2}}{\cos\gamma/2}\right| \leq \frac{1}{\cos\gamma/2}\right\}.$$

Встановлено також інші ознаки збіжності одноперіодичного ГЛД в кутових та параболічних областях.

[1] Боднар Д.И.,*Ветвящиеся цепные дроби*- К.: Наукова думка, 1986. - 174с.

[2]Джоунс.У У. Трон *Непрерывные дроби.*-[пер с англ. В.Е.Кондрашова, С.Б.Королева, И.Г. Турундаевской].- М.: Мир, 1985. - 414с.

[3]Lorentzen L., H.Waadeland *Continued fractions with applications.* - Amsterdam: North-Holland, 1992. - 606p.

Тернопільський національний
економічний університет

О приближениях функций средними Вороного интегралов Фурье.

Бойцун Л.Г. Рыбникова Т.И.

Интеграл Фурье функции $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ есть

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t)cos(x-t)dt.$$

Если $p(t)$- интегрируемая на $[0, A]$, $A > 0$, функция, $P(y) = \int_0^y p(t)dt \neq 0$, тогда $\int_0^\infty f(t)dt$ суммируется методом Вороного к I, если

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)S(u)du \to I,$$

когда $y \to \infty$, где $S(u) = \int_0^u f(t)dt$.

$\tau(y)$ называют средними Вороного интеграла $\int_0^\infty f(t)dt$, или $(W, p(y))$ - средними.

Пусть $C^*[0, \infty)$ класс непрерывных на $[0, \infty)$ функций;

$$\omega(t) = \sup_{|x_1 - x_2| \le t} |f(x_1) - f(x_2)|, x_1, x_2 \in [0, \infty).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $p(y)$ -положительная функция такая, что $P(y) \to \infty$, и

$$0 < yp(y) \le CP(y), \qquad y > 0, p(0) > 0, \tag{1}$$

$$\left|\int_0^y p(u)sin(y-u)tdu\right| < KP\left(\frac{1}{t}\right), \qquad t > 0, y > 0. \tag{2}$$

Тогда

$$\max_{0 \le t < \infty} |f(t) - \tau(y,t)| = O\left\{\frac{1}{P(y)}\int_0^y \frac{P(u)\omega(\frac{1}{u})}{u}du\right\},$$

где $\tau(y,t) - (W, p(y))$-средние интеграла Фурье функции $f(t)$

Беря функцию $f(t) \in Lip\alpha$ для $0 < \alpha \le 1$, а δ такое, что $0 < \alpha < \delta \le 1$, как следствие получаем теорему.

Теорема 2. Пусть $f(t) \in Lip\alpha$ для $0 < \alpha \le 1$, и $0 < \alpha < \delta \le 1$, тогда

$$\max_{0 \le t < \infty} |f(x) - \tau(y,x,\delta)| = O\left(\frac{1}{y^\alpha}\right),$$

где $\tau(y,x,\delta) = \frac{\delta}{y}\int_0^y \left(1 - \frac{u}{y}\right)^{\delta - 1} S(u)du$-чезаровские средние порядка δ интеграла Фурье функции $f(t)$.

Узагальнена теорема Вейєрштрасса для δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій

Оксана Бродяк, Ярослав Васильків

Нехай $\mu = \mu^+ - \mu^-$ – дійснозначна борелева міра (тобто заряд) в $\mathbb{C}$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ – повна варіація μ. Припускатимемо, що $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \bigcap \operatorname{supp} \mu = \emptyset$, де $\operatorname{supp} \mu$ – носій заряду μ. Клас таких зарядів позначатимемо через $\mathfrak{M}$. Нехай $n(r; |\mu|) = |\mu|(\overline{\mathbb{D}}_r)$ – повна маса заряду замкненого круга $\overline{\mathbb{D}}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $N(r; |\mu|) := \int_0^r n(t; |\mu|) t^{-1} d\,t$. Для довільної невід'ємної, неспадної, необмеженої функції $\nu(r)$, визначеної на $\mathbb{R}_+$ і $\nu(r) = 0$ при $0 \le r < 1$, через $\mathfrak{M}^*(\nu)$ будемо позначати підклас $\mathfrak{M}$ такий, що для довільного $\mu \in \mathfrak{M}$ виконується нерівність $n(r; |\mu|) \le \nu(r)$ для всіх $r > 0$ і функція $\beta(r) := \nu(r) - n(r; |\mu|)$ не спадає.

Довільній неспадній, невід'ємній, необмеженій функції $g(r)$, $g(r) = 0$ при $0 \le r < 1$, поставимо у відповідність функцію

$$\lambda(r; g, p_g) := \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p_g(t)-1} d\,g(t) + \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p_g(t)} d\,g(t), \tag{1}$$

де $p_g(t)$ – неспадна, додатна, цілочисельна функція така, що другий інтеграл в (1) скінченний для довільного $r > 0$.

Нехай $\rho_g := \overline{\lim}_{r\to+\infty} \log^+ g(r)/\log r$, $0 \le \rho_g \le +\infty$, – порядок функції зростання $g(r)$. Якщо $0 \le \rho_g < +\infty$, то у такому випадку покладемо $p_g(t) := [\rho_g] + 1$, де $[x]$ – ціла частина числа x, і, тоді

$$\lambda(r; g, p_g) = [\rho_g] r^{[\rho_g]} \int_0^r \frac{g(t)}{t^{[\rho_g]+1}} d\,t + ([\rho_g] + 1) r^{[\rho_g]+1} \int_r^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{[\rho_g]+2}} d\,t. \tag{2}$$

Теорема.i) *Для довільного $\mu \in \mathfrak{M}$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w такий, що його неванліннова характеристика $T(r, w)$ для всіх $r \ge 1$ задовольняє нерівність*

$$T(r, w) \le N(r; |\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \lambda(r; n, p_n),$$

де функція $\lambda(r; n, p_n)$ задана співвідношенням (1) при $g(r) = n(r; |\mu|)$ у випадку $\rho_n = +\infty$ і співвідношенням (2) при $g(r) = n(r; |\mu|)$ у випадку $\rho_n < +\infty$ відповідно.
ii) *Для довільного $\mu \in \mathfrak{M}^*(\nu)$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w такий, що його неванліннова характеристика $T(r, w)$ для всіх $r \ge 1$ задовольняє нерівність*

$$T(r, w) \le N(r; |\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \lambda(r; \nu, p_\nu),$$

де функція $\lambda(r; \nu, p_\nu)$ задана співвідношенням (1) при $g(r) = \nu(r)$ у випадку $\rho_\nu = +\infty$ і співвідношенням (2) при $g(r) = \nu(r)$ у випадку $\rho_\nu < +\infty$ відповідно.

Національний університет
"Львівська політехніка"
e-mail: brodyakoksana@mail.ru

Львівський національний університет
імені Івана Франка
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com

О неравенствах типа Колмогорова для аналитических функций одной и нескольких переменных

М.Б.Вакарчук, С.Б.Вакарчук

С начала прошлого века особый интерес у многих математиков, начиная с Э.Ландау, Ж.Адамара, Г.Харди, Дж.Литтльвуда, А.Н.Колмогорова, вызывает получение точных неравенств для норм промежуточных производных функции через норму самой функции и норму ее старшей производной. Определенный интерес данный вопрос представляет и в случае аналитических функций комплексного переменного [1]-[2].

Сформулируем один из полученных результатов. Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в U; H_q $(q \geqslant 1)$ — банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых конечна норма $\|f\|_q = \{\lim\limits_{\rho\to 1-0} M_q(f,\rho)$, если $1 \leqslant q < \infty$; $\sup\limits_{z\in U} |f(z)|$, если $q = \infty\}$, где

$$M_q(f,\rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right\}^{1/q}.$$

Символом H_q^r $(r \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций $f \in A(U)$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству Харди H_q.

Теорема. Пусть $r \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant r$ – натуральные числа; $1 \leqslant p \leqslant 2;\ 2 \leqslant s,t \leqslant q;\ \alpha_{r,j} = r(r-1)...(r-j+1);\ j = \overline{1,r};\ \alpha_{r,0} = 1$. Тогда для любой функции $f \in H_q^r$, у которой коэффициенты Тейлора $c_\nu(f) = 0$, где $\nu = r-k,...,r-1$, имеют место неравенства

$$\|f^{(r-k)}\|_q \leqslant \frac{\alpha_{r,r-k}}{\left(\alpha_{r,r}\right)^{1-k/r}} \ \|f\|_s^{k/r} \ \|f^{(r)}\|_t^{1-k/r}. \tag{1}$$

Неравенства (1) являются точными в том смысле, что существует функция из класса H_q^r, которая обращает (1) в равенства.

Результаты (1) распространены на аналитические функции нескольких комплексных переменных. Также рассмотрены смежные вопросы теории аппроксимации в комплексной плоскости.

1. С. Б. Вакарчук, *О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций,* Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. Сб. научн. трудов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1988, 4–7.

2. М. Б. Вакарчук, *О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических в бикруге функций,* Теорія наближення та задачі обчислювальної математики. Тези доп. міжн. конф. – Дніпропетровськ : Вид. ДДУ, 1993, 35.

Днепропетровский национальный университет
e-mail: vacarchuk@yandex.ru

Днепропетровский университет
экономики и права
e-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций

С.Б.Вакарчук

К числу экстремальных задач теории аппроксимации, представляющих определенный интерес как в вещественном, так и в комплексном случае, относится, например, получение точных констант в неравенствах типа Джексона, вычисление точных значений различных n-поперечников, построение наилучших линейных методов приближения [1]-[2]. Приведем один из полученных результатов. Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}, R \geqslant 1; A(U_R)$ - множество функций, аналитических в U_R. Через $H_{p,R} := H_p(U_R), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма $\|f\|_{p,R}$.

Полагаем $H_p := H_{p,1}$; $\|f\|_p := \|f\|_{p,1}$; $H^m_{p,R} := \{f \in A(U_R) : f^{(m)} \in H_{p,R}\}$, $H^m_p := H^m_{p,1}$; $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{Z}_+$, подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного степени, не превосходящей n; $E_{n-1}(f)_p := \inf\{\|f - \Pi_{n-1}\|_p : \Pi_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}, n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{L}_{n-1}$ — линейный оператор, отображающий $H^m_{p,R}$ в $\mathcal{P}_{n-1}$; $\omega_2(f,t)_{p,R} := \sup\{\|f(ze^{ix}) - 2f(z) + f(ze^{-ix})\|_{p,R} : |x| \leqslant t, x \in \mathbb{R}\}$ — модуль непрерывности второго порядка функции $f \in H_{p,R}$. Рассмотрим функцию типа второго модуля непрерывности

$$\omega^*_2(f,t)_p := \frac{1}{t}\int_0^t \omega_2(f,\tau)_{p,R}d\tau. \tag{1}$$

Теорема. Для любых $n, m \in \mathbb{N}, n > m; 1 \leqslant p \leqslant \infty; R \geqslant 1$ справедливы равенства

$$\inf_{\mathcal{L}_{n-1}:H^m_{p,R}\to\mathcal{P}_{n-1}} \sup_{\substack{f\in H^m_{p,R}\\ f\notin\mathcal{P}_m}} \frac{R^{n-m}\alpha_{n,m}\|f-\mathcal{L}_{n-1}(f)\|_p}{\omega^*_2(f^{(m)};\pi/(2(n-m)))_p} =$$

$$= \sup_{\substack{f\in H^m_{p,R}\\ f\notin\mathcal{P}_m}} \frac{R^{n-m}\alpha_{n,m}E_{n-1}(f)_p}{\omega^*_2(f^{(m)};\pi/(2(n-m)))_p} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\ ,$$

где $\alpha_{n,m} := n(n-1)...(n-m-1)$.

Также вычислены точные значения ряда поперечников классов аналитических в U_R функций, определенных при помощи усредненной характеристики гладкости (1).

1. С. Б. Вакарчук, *О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций,* Мат. заметки, **65**, №2 (1999), 186–193.

2. С. Б. Вакарчук, В.И.Забутная, *О наилучших линейных методах приближения функций класов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1, 0 < \rho \leqslant 1$,* Мат. заметки, **85**, №3 (2009), 323–329.

Днепропетровский университет
экономики и права
e-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Зростання аргументів цілих функцій цілого порядку

Ярослав Васильків, Олена Коренівська

Нехай f – ціла в $\mathbb{C}$ функція, $f(0)=1$. Нехай також

$$N(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\,\theta,\quad T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\,\theta,\quad r>0.$$

Крім того, нехай f задовольняє одну з наступних умов:

$$\lambda=q,\quad \int_0^{+\infty}t^{-q-1}N(t,f)\,d\,t<+\infty,\quad \liminf_{r\to+\infty}r^{-q}T(r,f)=0; \tag{1}$$

$$\lambda=q,\quad \int_0^{+\infty}t^{-q-1}N(t,f)\,d\,t=+\infty, \tag{2}$$

де $\lambda=\limsup\limits_{r\to+\infty}\log N(r,f)/\log r,\ q=\limsup\limits_{r\to+\infty}\log T(r,f)/\log r.$

Нехай порядок f дорівнює $q\in\mathbb{N}$. Покладемо $S(r):=qr^q\int_r^{+\infty}t^{-q-1}N(t,f)\,d\,t$, якщо f задовольняє умову (1) та $S(r):=qr^q\int_0^r t^{-q-1}N(t,f)\,d\,t$, якщо f задовольняє умову (2).

Через $m_p(r,\log f)$ та $m_p(r,\arg f)$ позначатимемо лебегові середні степеня $p\in[1,+\infty)$:

$$m_p(r,\log f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log f(re^{i\theta})|^p d\,\theta\right)^{\frac{1}{p}},\ m_p(r,\arg f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\arg f(re^{i\theta})|^p d\,\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 1. *Нехай f – ціла функція порядку $q\in\mathbb{N}$, $f(0)=1$. Якщо f задовольняє умову (1) чи (2), то для довільного $p\in[1,+\infty)$:*

$$\liminf_{r\to+\infty}\frac{m_p(r,\log f)}{S(r)}\le 1;\qquad \liminf_{r\to+\infty}\frac{m_p(r,\arg f)}{S(r)}\le m_p(\sin q\theta).$$

При цьому, ці оцінки є точними.

Теорема 2. *Нехай f – ціла функція порядку $q\in\mathbb{N}$ з додатними нулями, $f(0)=1$. Якщо f задовольняє умову (1) чи (2), то для довільного $p\in[1,+\infty)$:*

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{m_p(r,\log f)}{S(r)}\ge 1;\qquad \limsup_{r\to+\infty}\frac{m_p(r,\arg f)}{S(r)}\ge m_p(\sin q\theta).$$

При цьому, ці оцінки є точними.

Львівський національний університет
імені Івана Франка
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com

Львівський національний університет
імені Івана Франка
e-mail: korenivskaolena@rambler.ru

О взаимном уклонении подпространств эрмитовых сплайнов различных порядков

В. Л. Великин

Пусть $S_{r,m} = \{s_{r,m}(f;\Delta_n,x)\colon\ m \ge r,\ f \in C^q[0,1],\ q \ge r,\ q = 0,1,2,\ldots\}$ – подпространства эрмитовых сплайнов по разбиению $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$, gde

$$s_{r,m}(f;\Delta_n,x) = \sum_{k=0}^{r} f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k H_{k,m}(h_i; x_i - x)$$

для $x \in [x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n$, где $h_i = x_i - x_{i-1},\ f_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$, а

$$H_{k,m}(h;t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{C_{m+s}^s}{h^{m+s+1}} \cdot t^{k+s}.$$

Для этих подпространств рассмотрена задача нахождения точных оценок их взаимного уклонения

$$\Theta_{q,p}[r,m_1,m_2] = \sup_{||f||^{(q)} \le 1} ||s_{r,m_1}(f;\Delta_n,x) - s_{r,m_2}(f;\Delta_n,x)||_{L_p(0,1)}, \quad ||f||^q = \sum_{k=0}^{q} ||f^{(k)}||_\infty.$$

В частности, получены следующие соотношения $\delta_n = \max_i h_i$:

$$\Theta_{1,\infty}[0,1,0] = \frac{\sqrt{3}\delta_n}{9(2+\delta_n)} \le \Theta_{1,\infty}[0,m,0] < \frac{\delta_n}{2+\delta_n} = \lim_{m\to\infty} \Theta_{1,\infty}[0,m,0],$$

$$\Theta_{0,\infty}[0,m+1,m] = ||\varphi_m||_\infty, \quad \Theta_{1,\infty}[0,m+1,m] = \frac{\delta_n}{2+\delta_n} = ||\varphi_m||_\infty,$$

где

$$\varphi_m(t) = C_{2m+1}^m t^{m+1}(1-t)^{m+1}(1-2t).$$

Далее,

$$\frac{1}{8} = \Theta_{0,1}[0,1,0] \le \Theta_{0,1}[0,m,0] < \frac{1}{2} = \lim_{m\to\infty} \Theta_{0,1}[0,m,0],$$

$$\Theta_{0,1}[0,m+\nu,m] = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(2m+2j+1)!}{2^{2m+2j+1}(m+j)!(m+j+2)!}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, получены точные значения

$$\sup_{f\in W_\infty^{q+1}} ||s_{q,m}(f,\Delta_n,x) - s_{q,m+1}(f,\Delta_n,x)||_p, \quad p = 1,\infty.$$

В частности, при $q = 1$ і $p = \infty$ указанная величина равна $\frac{C_{2m}^m}{(m+1)2^{2m+3}}\delta_n^2$.

Dnepropetrovsk National University
e-mail: velikiny@rambler.ru

30–компонентні хвильові рівняння для векторних полів. Опис внутрішніх характеристик.

П.О.Власов

В [1] була запропонована модифікована система рівнянь, яка описує взаємодію полів, що несуть спін 1, з електромагнітним полем

$$\frac{1+2k}{\sqrt{3}} P^{\lambda}\psi_{\lambda\mu} = mc\phi_{\mu},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(P_{\mu}\phi_{\nu} - P_{\nu}\phi_{\mu} + P^{\lambda}\omega_{\lambda\mu\nu} + P^{\lambda}\sigma_{\lambda[\mu\nu]}\right) = mc\psi_{\mu\nu},$$

$$\frac{1+2k}{\sqrt{3}}\left(P_{\lambda}\psi_{\mu\nu} + P_{\mu}\psi_{\nu\lambda} + P_{\nu}\psi_{\lambda\mu}\right) = mc\omega_{\lambda\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\frac{1-k}{\sqrt{3}}\left(2P_{\lambda}\psi_{\mu\nu} - P_{\mu}\psi_{\nu\lambda} - P_{\nu}\psi_{\mu\lambda} + P^{p}\psi_{p\mu}g_{\lambda\nu} - P^{p}\psi_{p\nu}g_{\lambda\mu}\right) = mc\sigma_{\lambda[\mu\nu]}.$$

Тут ϕ_{μ}-вектор, $\psi_{\mu\nu}$, $\omega_{\lambda\mu\nu}$-антисиметричні тензори відповідно другого і третього рангів у просторі Мінковського, $\sigma_{\lambda[\mu\nu]}$- тензор третього рангу, антисиметричний по індексах у квадратних дужках, що перетворюється за представленням $(3/2, 1/2) \oplus (1/2, 3/2)$ повної групи Лоренца, $g_{\mu\nu}$-метричний тензор у просторі Мінковського, к- параметр, який дозволяє описувати внутрішні характеристики поля, $P^{\mu} = p^{\mu} - \frac{e\hbar}{c}A^{\mu}$- розширений оператор імпульсу. По верхньому і нижньому індексам, що повторюються, передбачається підсумовування.

Після виключення компонент, які не диференціюються по часу, систему можна записати у гамільтонівській формі

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \tag{2}$$

з оператором Гамільтона

$$H = \alpha\left(\frac{1}{m}\left[\vec{P}^2 - k^2(\vec{S}\vec{P})^2 - \frac{ke\hbar}{c}(\vec{S}\vec{H})\right]R(+) - ikc\beta(\vec{S}\vec{P}) + eA_0 + mc^2\right), \tag{3}$$

де

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 \\ E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E_3 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & E_3 & 0 & 0 \\ -E_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_3 \end{pmatrix},$$

$$S^i = \begin{pmatrix} s^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^i \end{pmatrix},$$

E_3- одинична матриця третього порядку, s^i-спінові матриці третього порядку. З (3) видно, що система (1) описує поля з внутрішнім магнітним моментом $\frac{ke\hbar}{c}$. Член $ikc\beta(\vec{S}\vec{P})$ описує поляризаційні ефекти.

1.Власов П.О. Частинки із спіном 1 і довільним магнітним моментом. Матеріали третьої міжнародної конференції "Наука і освіта 2000"Київ-Дніпропетровськ-Харків-Черкаси-Т.2.2000.

Наближення гріді-алгоритмами узагальнених класів Бєсова-Нікольського

Войтенко С.П.

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, де $\Omega(t)$ — задана функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l) — так звані умови Барі–Стєчкіна (див., наприклад, [2]). Нехай $L_q(\mathbb{T}^d)$ — простір 2π–періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ на кубі $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$ зі стандартною нормою.

Кожній функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$, співставимо її тригонометричний ряд Фур'є $f \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k)e^{i(k,x)}$, де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t)e^{-i(k,t)}dt$.

Нехай $\{\widehat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ – коефіцієнти Фур'є $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ функції f, впорядковані за незростанням їх модулів, тобто

$$|\widehat{f}(k(1))| \ge |\widehat{f}(k(2))| \ge \dots,$$

і

$$G_M(f, x) = \sum_{l=1}^{M} \widehat{f}(k(l))e^{i(k(l),x)}.$$

Зауважимо, що апроксимант $G_M(f, x)$ може бути не єдиним.

Для функціонального класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ покладемо

$$G_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q := \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(x) - G_M(f, x)\|_q.$$

Такого роду метод M-членного тригонометричного наближення називається гріді-алгоритмом (від англ. *greedy algorithm*).

Одержано точні за порядком оцінки оцінки гріді-алгоритмів на класах $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p, q \le \infty$.

Мають місце такі твердження.

Теорема 1. Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$, $1 \le q \le 2$ і $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d(1/p - 1/2)_+$, а також умову (S_l). Тоді має місце оцінка

$$G_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(M^{-1/d})M^{(1/p-1/2)_+}.$$

Теорема 2. Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$, $2 < q \le \infty$ і $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > d \max\{1/p; 1/2\}$, а також умову (S_l). Тоді має місце оцінка

$$G_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(M^{-1/d})M^{\max\{1/p;1/2\}-1/q}.$$

1. Li Yongping, Xu Guiqiao, *The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes,* J. of Complexity, **18** (2002), 815-832.

2. Бари Н.К., Стечкин С.Б., *Наилучшие приближения и дифферинциальные свойства двух сопряженных функций* , Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483 - 522.

Інститут математики НАН України,
Київ
e-mail: sergii.voitenko@gmail.com

Формосохраняющая интерполяция нелокальными сплайнами

Ю. С. Волков

Геометрическая форма графика функции характеризуется знаками производных этой функции. Рассматривается задача о наследовании интерполянтом знаков производных исходной функции. В качестве интерполянтов выбраны наиболее используемые в практических задачах классические полиномиальные сплайны, в основном невысоких степеней (кубические, параболические).

Наряду с задачей k-монотонной интерполяции, т.е. интерполяции, при которой сохраняется знак какой-либо производной порядка k на всём промежутке интерполирования, изучается задача интерполяции с переменами направления k-монотонности. К первому случаю, например, относятся задачи положительной, монотонной, выпуклой интерполяции, к задачам второго типа можно отнести задачи коположительной, комонотонной, ковыпуклой интерполяции. Конечно же такие задачи не всегда разрешимы.

В докладе приводится обзор имеющихся результатов и приводятся легко проверяемые условия на данные, выполнение которых обеспечивает сохранение сплайном формы интерполируемой функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Отделения математических наук РАН (код проекта 2009-1.3.8), Интеграционных проектов СО РАН (код проекта 2009-81) и проектов СО РАН, выполняемых совместно с УрО РАН, (код проекта 2009-14).

Институт математики им.С.Л.Соболева
Сибирского отделения РАН, Новосибирск
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Новые теоремы единственности для решений уравнений свертки

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Известная теорема единственности Ф. Йона утверждает, что если бесконечно дифференцируемая функция с нулевыми интегралами по всем сферам одного фиксированного радиуса обращается в нуль в некотором шаре такого же радиуса, то она равна нулю тождественно. Примеры, построенные Ф. Йоном, показывают, что в двумерном и трехмерном случаях условие бесконечной гладкости функции ослабить нельзя.

Существенное уточнение и обобщение этих результатов было получено авторами в [1], [2]. При этом был обнаружен новый эффект - зависимость между порядком гладкости функции из различных обобщений теоремы Ф.Йона и количеством нулевых коэффициентов Фурье в разложении этой функции в ряд по сферическим гармоникам.

Кроме того, предложенные автором методы позволили получить аналогичные результаты для решений широкого класса уравнения свертки. Помимо значительного самостоятельного интереса такие результаты важны в связи с их существенными и эффективными приложениями в экстремальных задачах о множествах Помпейю, в теории лакунарных рядов, в проблеме носителя, в теории гармонических функций, а также при изучении различных классов периодических в среднем функций и их обобщений.

Получены также новые теоремы единственности на римановых симметрических пространствах компактного и некомпактного типа, а также их аналоги для уравнений свертки с искажением.

Литература

1. Volchkov V.V., *Integral Geometry and Convolution Equations,* Dordrecht / Boston / London. Kluwer Academic Publishers. 2003. 454p.

2. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V., *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group,* Springer-Verlag London Limited, 2009. 671 pp.

Донецкий национальный
университет
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Оценки смешанных норм рядов по произведениям синусов и косинусов с кратно монотонными коэффициентами.

Т.М.Вуколова

Будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}\sin mx\cos ny,$ (1)
где для краткости обозначено $\cos 0\cdot y=\frac{1}{2}$.

Будем писать, что сумма ряда (1) – функция $F(x,y)\in L_p$, где $p\in(0;\infty)$, если $\|F\|_p=\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|F(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$. Для целых $k_1\geq 0$ и $k_2\geq 0$ обозначим $\Delta_{k_1k_2}a_{mn}=\sum_{j=0}^{k_2}(-1)^jC_{k_2}^j\sum_{i=0}^{k_1}(-1)^iC_{k_1}^i a_{m+i\quad n+j}$. Для $k_1\geq 1$ и $k_2\geq 1$ обозначим также $A(k_1,k_2,p)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\Delta_{k_1-1k_2-1}a_{mn}\right)^p m^{k_1p-2}(n+1)^{k_2p-2}\right)^{\frac{1}{p}}$.

I. Пусть последовательность $\{a_{mn}\}$ удовлетворяет условиям:
$a_{mn}\to 0$ при $m\to\infty$ и любом фиксированном n,
$a_{mn}\to 0$ при $n\to\infty$ и любом фиксированном m, (2)
$\Delta_{k_1k_2}a_{mn}\geq 0$ для любых целых неотрицательных m и n и некоторых $k_i\geq 1$.

а) Пусть числа k_1,k_2 и p таковы, что: если $k_1=k_2=1$, то $p\in(0;\infty)$, если $k_1=1,k_2=2$, то $p\in(0;\infty)$, если $k_1=1,k_2\geq 3$, то $p\in(\frac{1}{2};\infty)$, если $k_1\geq 2,k_2\geq 1$, то $p\in(1;\infty)$. Тогда

$$\|F\|_p\leq C_1A\left(k_1,k_2,p\right). \tag{3}$$

б) Пусть числа k_1,k_2 и p таковы, что: если $k_1\geq 1,k_2=1$, то $p\in(1;\infty)$, если $k_1\geq 1,k_2\geq 2$, то $p\in(0;\infty)$. Тогда

$$A\left(k_1,k_2,p\right)\leq C_2\|F\|_p. \tag{4}$$

В неравенствах (3) и (4) C_1 и C_2 зависят лишь от k_1,k_2 и p.

II. Пусть числа k_1, k_2 и p таковы, что: если $k_1 = 1$, $k_2 \geq 3$, то $p \in (0; \frac{1}{2}]$, если $k_1 \geq 2$, $k_2 \geq 1$, то $p \in (0; 1]$. Тогда не существует такой постоянной C_1, зависящей, быть может, лишь от k_1, k_2 и p, что для любой последовательности $\{a_{mn}\}$, удовлетворяющей условиям (2) для этих k_1 и k_2 и соответствующей ей функции $F(x, y)$ было бы справедливо неравенство (3).

III. Пусть числа k_1, k_2 и p таковы, что: если $k_1 \geq 1, k_2 = 1$, то $p \in (0; 1]$. Тогда не существует такой постоянной C_2, зависящей, быть может, лишь от k_1, k_2 и p, что для любой последовательности $\{a_{mn}\}$, удовлетворяющей условиям (2) для этих k_1 и k_2, и соответствующей ей функции $F(x, y)$ было бы справедливо неравенство (4).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00175)

Россия, Москва
МГУ им.М.В.Ломоносова

О приближении $\mathbb{C}$-выпуклых компактов $\mathbb{C}$-квазивыпуклыми полиэдрами

И.Ю.Выговская, Ю.Б.Зелинский

Сильно линейно выпуклые (дальше $\mathbb{C}$-выпуклые) множества являются важным классом множеств, изучаемых в комплексном анализе и обладающих многими достоинствами выпуклых множеств. С другой стороны, этот класс обладает рядом недостатков, главный из которых — незамкнутость класса относительно пересечений. Поэтому для него не выполняется основная аксиома выпуклости.

В докладе рассмотрим класс $\mathbb{C}$-квазивыпуклых множеств, включающих в себя $\mathbb{C}$-выпуклые множества, который является замкнутым относительно пересечений.

Определение. Линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$ назовём $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством, если его сечения каждой комплексной прямой λ состоят из односвязных компонент (или, что то же — множество $\lambda^0 \setminus \lambda \cap E$ связно, $\lambda^0 = \lambda \cup (\infty)$ — одноточечная компактификация прямой λ).

Очевидно, что этот класс содержит в себе $\mathbb{C}$-выпуклые области и компакты.

Пересечение любого семейства компактных $\mathbb{C}$-квазивыпуклых множеств будет $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством.

Теорема 1. Область или компакт, являющиеся декартовыми произведениями,
$\mathbb{C}$-выпуклы тогда и только тогда, когда они выпуклы.

Теорема 2. Компактный линейно аналитический полиэдр, все грани которого односвязные являются $\mathbb{C}$-квазивыпуклым множеством.

Институт математики НАНУ
e-mail: zel@imath.kiev.ua

Відносна стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та змінною кількістю гілок розгалуження

Володимир Гладун

Предметом дослідження є властивість стійкості до збурень нескінченних гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) з комплексними елементами

$$a_0 \left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{1}$$

де $N_{i(k)}$ – кількість гілок розгалуження, $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ – мультиіндекс. Нехай

$$I_0 = \{0\}, \quad I_k = \{i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k : 1 \le i_p \le N_{i(p-1)}, p = \overline{1,k}\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

ГЛД (1) називають *відносно стійким до збурень* , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що будь-який ГЛД $\widehat{a}_0 \left(\widehat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}} \right)^{-1}$ елементи якого задовольняють нерівності

$$\left| \left(\widehat{a}_{i(k)} - a_{i(k)} \right) / a_{i(k)} \right| < \delta, \quad \left| \left(\widehat{b}_{i(k)} - b_{i(k)} \right) \Big/ b_{i(k)} \right| < \delta, \quad i(k) \in I_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

збігається і виконуються нерівності

$$\left| \left(\widehat{f}^{(s)} - f^{(s)} \right) \Big/ f^{(s)} \right| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $f^{(s)}$ – s-ий підхідний дріб ГЛД (1).

Теорема. *Нехай відносні похибки* $\alpha_{i(k)}, \beta_{i(k)}$ *елементів* $a_{i(k)}, b_{i(k)}$ *ГЛД (1) є рівномірно обмеженими:*

$$\left|\alpha_{i(k)}\right| \le \alpha < 1, \quad \left|\beta_{i(k)}\right| \le \beta < 1, \quad i(k) \in I_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Якщо елементи ГЛД (1) задовольняють умови

$$\left|b_{i(k-1)}\right| \ge 1 + \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left|a_{i(k)}\right|, \quad \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left|a_{i(k)}\right| \le \mu,$$

де $0 < \mu < 1$ *– задана стала, причому*

$$\frac{\mu}{(1+\mu)^2} \le \frac{(1-\beta)^2}{4(1+\alpha)},$$

то ГЛД (1) є відносно стійким до збурень і для відносної похибки s *-го підхідного дробу справджується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \le \frac{1 - \beta - \mu(1+\beta) - \sqrt{(1-\beta)^2 (1+\mu)^2 - 4\mu(1+\alpha)}}{2\mu}.$$

Національний університет "Львівська політехніка"
e-mail: v_hladun@yahoo.com

Відносна чебишовська точка системи обмежених замкнутих множин, які неперервно змінюються

Юрій Гнатюк, Василь Гнатюк, Уляна Гудима

Нехай X -лінійний над полем комплексних чисел нормований простір, $B(X)$ $(O(X))$ сукупність довільних (опуклих) обмежених замкнутих множин простору X, S-компакт, $C(S, B(X))$ $(C(S, O(X)))$ - множина багатозначних відображень компакту S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = B_s \in B(X)$ $(a(s) = O_s \in O(X))$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $B(X)$, $a \in C(S, B(X))$, $V \subset X$, $E_{a(s)}(g) = \inf\limits_{y \in a(s)} \|g - y\|$ -найкраще наближення елемента g множиною $a(s)$, $s \in S$.

Розглядається задача відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} E_{a(s)}(g) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \|g - y\| . \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що $\alpha_a^*(V) = \max\limits_{s \in S} E_{a(s)}(g^*)$, то його називають чебишовською точкою відносно множини V системи $\{a(s), s \in S\}$ обмежених замкнутих множин простору X , які неперервно змінюються щодо хаусдорфової метрики на $B(X)$.

Для задачі відшукання величини (1) встановлено деякі теореми існування, єдиності, необхідні, достатні умови та критерії відносної чебишовської точки, властивості екстремального функціонала та екстремального оператора.

Зокрема має місце наступний критерій чебишовської точки.

Теорема. Нехай $a \in C(S, O(X))$, $g^* \in V$ і V є Γ^* - множиною відносно точки g^* , в тому числі зірковою відносно g^*, опуклою множиною.

Для того щоб елемент g^* був чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V, необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^* = \{f : \ f \in X^*, \ \|f\| \leqslant 1\}$, для яких виконуються співвідношення

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) = E_{a\left(s_g\right)}(g^*) = \operatorname{Re} f_g(g^*) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y),$$

$$\operatorname{Re} f_g(g - g^*) \geqslant 0.$$

Кам'янець-Подільський нац.
університет ім. Івана Огієнка
e-mail: gnatyuk _ yu _ v@mail.ru

Кам'янець-Подільський нац.
університет ім.Івана Огієнка
e-mail: gneve@yandex.ru

Pointwise Summability of two-dimensional Walsh-Fourier series

Ushangi Goginava

We give a characterization of points in which the Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional Walsh-Fourier series converges.

Tbilisi State University e-mail: z_goginava@hotmail.com

Узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації

Анатолій Голуб

Апроксиманти Паде порядку $[M/N]$ формального степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z_k \tag{1}$$

це раціональні функції $[M/N]_f(z) = \dfrac{P_M(z)}{Q_N(z)}$, такі що в околі точки $z = 0$

$$[M/N]_f(z) = \sum_{k=0}^{M+N} s_k z^k + O\left(z^{M+N+1}\right)$$

(див [1]). В. К. Дзядик [2] запропонував метод узагальнених моментних зображень для побудови та дослідження апроксимацій Паде функцій, що мають розвинення вигляду (1) з коефіцієнтами, для яких справедливі рівності

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle\,,\ k, j = \overline{0, \infty},$$

де $x_k \in X$, $y_j \in Y$ і $\langle ., . \rangle$ – білінійна форма, визначена на декартовому добутку лінійних просторів $X \times Y$.

Використання цього підходу привело до отримання ряду нових тверджень в теорії апроксимацій Паде та їх узагальнень [3]. В доповіді наводяться останні результати в цьому напрямі, зокрема, дослідження асимптотичної поведінки апроксимант Паде функцій типу Міттаг–Леффлера.

Література

1. Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, Аппроксимации Паде. - М.: Мир, 1986.

2. В. К. Дзядык, *Об обобщении проблемы моментов,* Докл. Акад. наук УССР. Сер.А, 1981, №6, 8–12.

3. А. П. Голуб, *Метод узагальнених моментних зображень в теорії раціональної апроксимації. Огляд,* Укр.мат.журн., **55** (2003), 307–359.

Інститут математики
НАН України
e-mail: golub@imath.kiev.ua

Про відхилення $\bar{\psi}$–диференційованих періодичних функцій від лінійних середніх їх рядів Фур'є

Т.В.Гориславець, П.В.Задерей

Нехай $2\pi-$ періодична функція є сумовною і її ряд Фур'є має вигляд:

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(f;x),$$

де $A_k(f;x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx,\ k=0,1,...$ Через $\bar{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ будемо позначати пару довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k=\overline{1,\infty}$, яка задовольняє умову $\bar{\psi}^2(k)=\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\neq 0,\ k\in\mathbb{N}$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)}A_k(f;x)-\frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)}\overline{A}_k(f;x)\right),$$

де $\overline{A}_k(f;x)=a_k\sin kx-b_k\cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L$, то слідуючи О.І.Степанцю, функцію $\varphi(\cdot)$ назвемо $\bar{\psi}-$ похідною функції f і будемо писати $\varphi(\cdot)=f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Нехай $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$, $k,n=0,1,...,$ $(\lambda_0^{(n)}=1,\ \forall n)$ – довільна прямокутна матриця чисел, яка ставить у відповідність кожній функції $f\in L$ послідовність рядів

$$U_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}A_k(f;x),n=1,2,...$$

Введемо наступні позначення $\tau_k^{(n)}:=(1-\lambda_k^{(n)})\psi_1(k),\quad \nu_k^{(n)}:=(1-\lambda_k^{(n)})\psi_2(k)$.

Теорема. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_1(k)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_2(k)=0$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx)$ є рядом Фур'є деякої функції з L, а також збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right|+\left|\Delta^2\nu_{k-1}^{(n)}\right|\right).$$

Тоді $\forall n,\ m\in\mathbb{N}$ справедлива оцінка рівномірна по m

$$\sup_{f\in C_{\infty}^{\bar{\psi}}}\|f(x)-U_n(f;x;\Lambda)\|_C=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|\nu_k^{(n)}|}{k}+O\Bigg(|\tau_m^{(n)}|+|\nu_m^{(n)}|+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}\left(\left|\Delta^2\tau_{k-1}^{(n)}\right|+\left|\Delta^2\nu_{k-1}^{(n)}\right|\right)+\sum_{k=2m+1}^{\infty}k\left(\left|\Delta^2\tau_{m+k-1}^{(n)}\right|+\left|\Delta^2\nu_{m+k-1}^{(n)}\right|\right)\Bigg),$$

де $C_{\infty}^{\bar{\psi}}=\{f(x):|f^{\bar{\psi}}(x)|\leq 1\text{ м.с.}\}$,

$$\xi_k=\xi\left(\nu_k^{(n)},\quad\sqrt{\left(\tau_{m-k}^{(n)}-\tau_{m+k}^{(n)}\right)^2+\left(\nu_{m-k}^{(n)}-\nu_{m+k}^{(n)}\right)^2}\right).$$

Київський національний університет
технологій та дизайна
e-mail: utes@bigmir.net

Київський національний університет
технологій та дизайна
e-mail: ZadereyPV@ukr.net

Про оцінки нев'язки слабких розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма першого роду за неповною дискретною інформацією

Олена Горохова

Серед актуальних питань сучасного розвитку теорії наближень значне місце займає проблематика, пов'язана з інформаційним підходом до задач апроксимації, які можна інтерпретувати як задачі наближеного відновлення деякого математичного об'єкта за неповною дискретною інформацією. Цей напрям був окреслений М.П.Корнєйчуком в роботах [1,2,3]. Зокрема, в [3] сформульовані три основні задачі відновлення операторів та елементів операторного рівняння $Ax = y$, $x \in X$, $y \in Y$, де X і Y - лінійні нормовані простори, оператор A належить простору лінійних обмежених операторів, що діють із X в Y, а також введено поняття слабко відомих елементів операторного рівняння за неповною дискретною інформацією . Постановка однієї з цих задач така:

Нехай відомий або слабо відомий оператор A, слабо відоме його значення $y = Ax$ у просторі Y на елементі x. Треба наближено відновити елемент x, знаючи лише те, що він належить області визначення оператора A у просторі X.

В рамках цієї задачі для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 K(t,u)x(t)dt = y(u), 0 \leq u \leq 1, x \in X, y \in Y,$$

де X і Y - простори періодичних функцій, встановлені апроксимативні характеристики (оцінки похибки нев'язки) слабких розв'язків інтегрального рівняння, побудованих за базисами з 1-періодичних моносплайнів Бернуллі порядку $r \geq 1$ та 1-періодичних нормованих B-сплайнів порядку $r \geq 2$ мінімального дефекту, узгоджених з гладкістю правої частини і ядра рівняння, за дискретною інформацією про праву частину, заданою відповідно наборами інтерполяційних функціоналів та інтерполяційних функціоналів спеціального вигляду.

Література

1. Н. П. Корнейчук, Сплайны в теории приближений. - М.: Наука, 1984. - 352 с.

2. N. P. Korneichuk *Encoding and recovery of operator values* J. Comlexity. - 1992. - Vol. 8. - P. 79-91.

3. Н. П. Корнейчук *Информационные аспекты в теории приближения и восстановление операторов* Укр.Мат.Журн. - 1999. **51**, №3. с.314-327.

ДВНЗ "Київський національний
економічний університет
імені Вадима Гетьмана"
e-mail: LenaG78@bigmir.net

Method for Representing Analytic Functions by Two-dimensional Continued Fractions

Natalya Hoyenko, Khrystyna Kuchmins'ka and Olga Sus'

One of the methods deals with the representation of analytic functions by continued fractions is that a formal continued fraction expansion is obtained by requiring that the Laurent expansion of the nth approximant agree term by term with a given Laurent series L up to the ν_n power of z, where ν_n tends to infinity with n. Continued fractions defined in this manner are said to correspond to the series L. Expansion constructions for analytic functions of two variables are also based on correspondence of a two-dimensional continued fraction to the formal double power series (fdps).

Definition. *A two-dimensional continued fraction*

$$\mathop{D}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,i}(z_1,z_2)}{\Phi_i(z_1,z_2)}, \quad \Phi_i(z_1,z_2) = b_{i,i}(z_1,z_2) + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}(z_1)}{b_{i+j,i}(z_1)} + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}(z_2)}{b_{i,i+j}(z_2)},$$

where $a_{i,i}(z_1,z_2), a_{i,j}(z_1), a_{i,j}(z_2)$, $b_{i,i}(z_1,z_2), b_{i,j}(z_1), b_{i,j}(z_2)$ are certain rational functions differ from zero will be said to correspond to a fdps

$$P(z) = \sum_{|k|=m}^{\infty} c_k z^k, \; z = (z_1,z_2), \; k = (k_1,k_2), \; |k| = k_1 + k_2, \; z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \; c_m \neq 0,$$

if each approximant $f_n(z)$ is a holomorphic function of z at the origin and if $\{f_n(z)\}$ corresponds to P at the origin.

If $\{f_n(z)\}$ corresponds to a formal double Taylor series P, then the order of correspondence of $f_n(z)$ is defined to be $\nu_n = \lambda(P - T(f_n(z)))$, the Taylor expansion of the function $f_n(z)$ at the origin is denoted by $T(f_n(z))$; $\lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ is the function defined as follows: if $P \equiv 0$, then $\lambda(P) = \infty$, if $P \neq 0$, then $\lambda(P) = m$, $\mathcal{P}$ is the set of all fdps.

Algorithms of double power series expansions into corresponding two-dimensional continued fractions with orders of correspondence of their nth approximants equal to $n+1$, $2n+1$ have been proposed. The Viscovatoff-like method is applied to the function

$$f_n(z_1,z_2) = \frac{z_1 e^{z_1} - z_2 e^{z_2}}{z_1 - z_2} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{z_1^i z_2^j}{(i+j)!}.$$

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics
and Mathematics NAS of Ukraine
e-mail: hoyenko@ukr.net,
kuchminska_khrys@hotmail.com, olja_sus@ukr.net

Сумматорные рациональные операторы типа Джексона на единичной окружности

Н. В. Гриб

Для заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\mathrm{n}}, 0 \leqslant |\alpha_k| < 1$, соответствующее произведение Бляшке имеет вид

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}$$

Уравнение $\sin \Phi_n(u) = 0$, где $\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu})$, имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}, j = \overline{1, 2n}$, расположенных на окружности $|z| = 1$.

В пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(u, \varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\varphi(u)}{\Phi'_n(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} \left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4 \frac{u - u_j}{2}},$$

где

$$\Psi_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{1}{2} \left(\Phi_n(v) - \Phi_n(u)\right) \sin^{-4} \frac{v - u}{2} dv.$$

Теорема 1. Если $\varphi(u) \in C_{2\pi}$, то имеет место неравенство

$$|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| \leqslant \left(1 + \pi\sqrt{2}\right) \omega \left((\Phi'_n(u))^{-1} \right),$$

где $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности функции $\varphi(u)$.

Через $VH_{2\pi}^{\alpha}$ обозначим класс функций из пространства $C_{2\pi}$, имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[0, 2\pi], V_0^{2\pi}[\varphi] \leqslant 1$, и удовлетворяющих условию Липшица $Lip\,\alpha,\ 0 < \alpha < 1$.

Теорема 2. Если $\varphi \in VH_{2\pi}^{\alpha}$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ справедлива оценка

$$|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| = O\left(\ln n / n\right).$$

Из теоремы следует, что операторы Джексона на классе $VH_{2\pi}^{\alpha}$ осуществляют приближение порядка наилучшего рационального.

В заключение заметим, что сумматорные рациональные операторы типа Джексона на действительной оси впервые были построены Е. А. Ровбой [1], и исследование проводилось для функций из класса C_{∞}.

Литература

1. Е. А. Ровба, *Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации,* Гродно, 2001.

Белорусский государственный
педагогический университет им. М. Танка
e-mail: nikolay.grib@mail.ru

Несколько экстремальных задач для алгебраических многочленов на сфере

М. В. Дейкалова

Пусть $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2$, есть m-мерное вещественное евклидово пространство; $\mathbb{S}^{m-1}$ – его единичная сфера. С помощью числа $h,\ -1 < h < 1$, определим сферическую шапочку $\mathbb{C}(h) = \mathbb{C}(h, e_m) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}:\ x_m \geq h\}$ с центром в «северном полюсе» $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ сферы. Обозначим через χ_h характеристическую функцию шапочки $\mathbb{C}(h)$. Нас интересует наилучшее приближение

$$e_{n,m}(h) = \inf\{\|\chi_h - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}:\ P_n \in \mathcal{P}_{n,m}\}$$

характеристической функции χ_h шапочки $\mathbb{C}(h)$ в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ множеством $\mathcal{P}_{n,m}$ алгебраических многочленов от m вещественных переменных с вещественными коэффициентами степени не выше n (по совокупности переменных).

В сообщении будет приведено решение задачи для размерности $m = 3$ при любых $h,\ -1 < h < 1$. Результат формулируется в терминах тригонометрического полинома $R_q(t) = \sin(n+2)t - 2q\sin(n+1)t + q^2 \sin nt,\ q \in (-1, 1)$, появившегося в исследованиях Я. Л. Геронимуса [1]. Известно (см. [2]), что полином R_q имеет $n+1$ нуль $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ на интервале $(0, \pi)$; более того, каждый из этих нулей $t_j,\ 1 \leq j \leq n+1$, непрерывно зависит от параметра $q \in (-1, 1)$ и с возрастанием q от -1 до $+1$ непрерывно убывает от точки $\frac{j\pi}{n+1}$ до точки $\frac{(j-1)\pi}{n+1}$, пробегая интервал $((j-1)\pi/(n+1), j\pi/(n+1))$.

Основной результат сообщения состоит в том, что при $n \geq 2,\ -1 < q < 1$ для $h = \cos t_\ell,\ 2 \leq \ell \leq n$, выполняется равенство

$$e_{n-1,3}(h) = 2\pi \left| \int_0^{t_\ell} \operatorname{sign}\big(R_q(t)\big) \sin t \, dt \right|.$$

Будет указан также соответствующий экстремальный многочлен. Для $h = \cos \frac{\pi j}{n+1},\ 1 \leq j \leq n$, результат был получен автором ранее [3].

Задача вычисления величины $e_{n,m}(\chi_h)$ связана с несколькими другими экстремальными задачами для многочленов на сфере, в частности, с задачей о точной константе в неравенстве Джексона – Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраического многочлена на $\mathbb{S}^{m-1}$.

А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякин [2] исследовали величину наилучшего интегрального приближения на периоде $[-\pi, \pi)$ характеристической функции интервала $(-h, h)$ тригонометрическими полиномами. В рассуждениях автора используются их соображения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 08-01-00213.

Список литературы

1. J. Geronimus *Sur quelques propriétés extrémales polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés*, Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. 12 (1935), 49–59.

2. А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин *Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами*, Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН 14 (3) (2008), 19–37.

3. М. В. Дейкалова *Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере*, Матем. заметки 84 (4) (2008), 532–551.

Уральский государственный
университет им. А.М.Горького,
e-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

Оптимальная аппроксимация оператора дифференцирования на основании τ-метода Ланцоша и a-метода Дзядыка

Петр Денисенко

Задача. Построить метод вычисления произвоных порядка k функций

$$y = y(x) = solve(\ F[y] = 0)\ ,\ x \in [a, b]\ , \quad (\ F[y] = 0\ ) \in \mathcal{M}^k\ , \tag{1}$$

где $\mathcal{M}^k$ — задача Коши и краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k , и реализовать его в системе компьютерной алгебры (СКА).

Актуальность. Maple и другие СКА — естественный аппарат моделирования. Они вычисляют производные функций — только композиции базиса $\{\ f_i\ \}_{i=1}^k$.

Если математическая модель описывает процесс дифференциальным уравнением порядка k, то, часто, исследуют не только решение $solve(\ F[y] = 0\ ) = y$ (1) этого уравнения, но и его производные $y', \ldots, y^{(k)}$. Критерий для выбора метода вычисления многочлена $y_n \approx y$ в таких моделях, обычно, $\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_{C_{[a,b]}}$.

Метод. Построить инструментальные средства для конструирования алгоритмов для СКА. Алгоритмы этого типа имеют следующие вход и выход:

$$INPUT = (\ F[y] = 0,\ [a, b]\ ,\ n\ ,\ k\ )\ , \qquad (\ F[y] = 0\ ) \in \mathcal{M}^k\ , \qquad OUTPUT =$$

$$y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ , \quad \|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X \asymp \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x)^{(k)} - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)^{(k)}\|_X \tag{2}$$

— $y_n^{(k)}$ – оптимальная в пространстве $X = C_{[a,b]}, \ldots$ аппроксимация функции $y^{(k)}$.

Мы построили и исследовали инструментальные средства:

1. Алгоритмы (2) — композиции a-метода Дзядыка [1] и преобразований — решают: A_1 — задачу Коши для ЛДУМК, A_2 — краевую задачу для ЛДУМК [2]. ЛДУМК — линейные дифференциальные уравнения с многочленными коэффициентами.
2. Алгоритмы — варианты τ-метода Ланцоша, эквивалентные этим композициям.
3. Метод 1 конструирования алгоритмов (2) для СКА — решения уравнений (1).

Технология применения этих инструментальных средств. По методу 1 мы построили алгоритмы (2) и (по этим алгоритмам) процедуры системы APS.

Эти процедуры и результаты их исследования доказывают. *a-Метод Дзядыка и τ-метод Ланцоша — эффективные средства для создания алгоритмов для вычисления в СКА многочленов $y_n^{(k)}$ (2) — оптимальной в пространстве $C_{[a,b]}$ аппроксимации производной порядка k решений уравнений типа $\mathcal{M}^k$.*

References

1. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

2. Денисенко П. Н. *Оптимальный метод решения краевых задач в системах компьютерной алгебры и его программирование в системе APS.* // Искусственный интеллект. — 2006. — N 4. — С. 140 – 155.

Кировоград, КННПК, e-mail: pnden_osvita@yahoo.com

Оптимальная аппроксимация многочленами решений функциональных уравнений в системах компьютерной алгебры

Петр Денисенко

Задача. Построить инструментальные средства для конструирования алгоритмов для систем компьютерной алгебры (СКА) с *входом и выходом*:

$$INPUT = (\ (F[y]=0) \in \mathcal{M}\ \sim\ (solve(\ F[y]=0\ ) = y = y(x),\ x \in [a,b])\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ),$$

$$OUTPUT = y_n = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n\ , \quad \|y - y_n\|_X \asymp \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

— оптимальная аппроксимация функции y в пространстве $X = C_{[a,b]},\ C^k_{[a,b]}, \ldots$.

Актуальность. Maple, Mathematica и другие СКА — естественный аппарат моделирования. Они решают обыкновенные дифференциальные уравнения и не решают аналитически уравнения других типов — интегральные, … .

Инструментальные средства. Мы построили и исследовали:

1. Операторы системы APS — выполняют преобразования a-метода Дзядыка [1].
2. Процедуры из этих операторов — решают функциональные уравнения типа:
   A_1 — задача Коши для ЛДУМК, A_2 — краевая задача для ЛДУМК [2] — линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами,
   A_3 — линейные интегральные уравнения с многочленными коэффициентами.
   Эти процедуры реализуют a-метод, композиции a-метода с преобразованиями исходного уравнения в интегральное и варианты [2], … τ-метода Ланцоша.
3. Метод 1 конструирования программ для решения функциональных уравнений:
   — аппроксимация исходного уравнения уравнениями типа A_i,
   — решение аппроксимирующих уравнений типа A_i по процедуре п. 2.

Технология применения этих инструментальных средств. По методу 1 из процедур п. 2 мы построили программы для решения функциональных уравнений следующих типов: — интегральных уравнений (Гаммерштейна и др.),
— задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений,
— уравнений перечисленных выше типов с регулярной особой точкой и их систем,
— уравнений перечисленных выше типов с отклоняющимся аргументом.

Эти процедуры и результаты их исследования доказывают. *a-Метод Дзядыка — эффективное средство для создания алгоритмов для вычисления в СКА многочленов – оптимальной аппроксимации решений уравнений типа $\mathcal{M}$.*

References

1. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

2. Денисенко П. Н. *Алгоритм решения краевых задач в системах компьютерной алгебры по τ-методу Ланцоша.* // Искусственный интеллект. — 2008. — N 1. — С. 38 – 48.

Кировоград, КННПК, e-mail: pnden_osvita@yahoo.com

Оценка качества електрической энергии средствами теории ряда Фурье

Петр Денисенко и Андрей Денисенко

Задачи. 1. Построить метод оценки качества електрической энергии.
2. Реализовать этот метод на компьютере.

Актуальность. Существует большое количество приборов для оценки качества електрической энергии. Эти приборы: — имеют высокую стоимость,
— требуют создания дополнительных компонент для передачи данных,
— имеют засекреченные алгоритмы работы.
В связи с этим возникает вопрос достоверности измерений.

Метод.

1. Разработать устройство для преобразования напряжения в электрической сети

$$\text{в массив} \qquad y_0,\ y_1,\dots,y_n, \qquad y_i \approx y(x_i)\ ,\quad x_i = i\cdot h\ ,\quad x_n \gg 1/50 \tag{1}$$

и передачи этого массива на компьютер.
2. Вычислить основную частоту $\omega = \omega(\ y_0,\ y_1,\dots,y_n)$ колебаний функции (1).
3. Вычислить коэффициенты Фурье функции (1) с перидом $1/\omega$ [1].
4. Преобразовать эти коэффициенты в показатели качества электрической энергии [2]. Эти показатели определены межгосударственным стандартом.
5. Сформировать отчет [2] о статистике этих показателей.

Алгоритм для вычисления основной частоты колебаний функции (1).

1. Вычислить максимум амплитуды гармоники с частотой ω функции (1)

$$A = A(\omega,\ y)\ ,\quad A^2 = C\cdot(a^2+b^2)\ ,\quad \text{где}\quad a = a(\omega,\ y) \approx 1/k\cdot\int_0^{2\cdot\pi\cdot k} y(g(t))\cdot\cos(t)\,dt\ ,$$

$$b = b(\omega,\ y) \approx 1/k\cdot\int_0^{2\cdot\pi\cdot k} y(g(t))\cdot\sin(t)\,dt\ ,\quad g(t) = t/(2\cdot\pi\cdot\omega)\ ,\quad k = [n\cdot h/\omega]\ .$$

2. Частоту, соответствующую этой амплитуде, принять за основную.

Реализация метода. Мы разработали устройство для получения функции (1) — напряжения в трехфазной электрической сети. Это устройство, программа, реализующая предложенный метод, и программы [2] вычисляют все показатели качества електрической энергии межгосударственого стандарта.

По результатам исследования предложенного метода методами [1] теории ряда Фурье мы построили алгоритмы для оценки погрешностей этих показателей.

References

1. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: ФМ. — 1961.

2. Плешков П. Г., Денисенко А. П. *Програмно-аппаратный комплекс для сбора и статистической обработки информации от средств измерения показателей качества электроэнергии с интеллектуальным формированием отчета.* // Искусственный интеллект. — 2009. — N 1. — С. 171 – 180.

КННПК, г. Кировоград, Украина, e-mail: pnden_osvita@yahoo.com

О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определенных мажорантой модуля непрерывности.

Евгения Дерец

Пусть H_1^ω - множество 2π периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f,t)_1 = \sup\limits_{|h|\le t}\int\limits_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|dx \le \omega(t)$, где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, $W^rH_1^\omega$ $(r=1,2,...)$ - множество 2π -периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t)\in H_1^\omega$.

Теорема . Пусть $\psi(t)$ - четная $2\pi/n$-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $|\psi'(t)|$ выпукла вверх на $[0,\pi/n]$ и для любого $t\in(0,\pi/(2n))$ $|\psi'(t)|>|\psi'(\pi/n-t)|$. Тогда для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ справедливо равенство $\sup\limits_{f\in H_1^\omega}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\psi(t)dt = \int\limits_0^{\xi}\omega'(2t)|\psi(t)|dt$, где $\xi\in(0,\pi/n)$ - нуль функции $\psi(t)$

Полученный результат позволяет получить точное решение некоторых экстремальных задач на классах $W^rH_1^\omega$ для выпуклого модуля непрерывности и четного r.

В случае, когда $\omega(t)$ выпуклый модуль непрерывности, в [1] найдено значение величины $\sup\limits_{f\in H_1^\omega}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\psi(t)dt$ для любой нечетной $2\pi/n$- периодической локально абсолютно непрерывной на всей оси функции $\psi(t)$, производная которой $\psi'(t)$ имеет 2 перемены знака на $[0,2\pi/n)$, и получено решение ряда экстремальных задач на классах $W^rH_1^\omega$ для нечетного r.

Литература

1. В. Г. Доронин, А. А. Лигун, *О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности,* Докл. АН СССР, **251, № 1** (1980), 16–19.

Днепродзержинский государственный технический университет

О приближении функций с класса $W^r_\beta H_\omega$ интегралами Пуассона в интегральной метрике*

К.Н. Жигалло и С.Б. Гембарская

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая суммируемая за Лебегом функция ($f\in L_1$, $\|f\|_{L_1}=\|f\|_1=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$) и $P_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\Big\{\frac12+\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\Big\}dt, \delta>0,$ — ее интеграл Пуассона. Далее, пусть $r>0$ и β — фиксированное действительное число. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^r\big(a_k\cos\big(kx+\frac{\pi\beta}{2}\big)+b_k\sin\big(kx+\frac{\pi\beta}{2}\big)\big)$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то эту функцию называют (r,β)-производной функции f в смысле Вейля–Надя и обозначают через $f^r_\beta(\cdot)$. Множество всех функций f, у которых существуют (r,β)-производные, обозначают через W^r_β (см., напр., [1]). Через $W^r_\beta H_\omega$ обозначим класс функций $f\in W^r_\beta$, (r,β)-е производные которых удовлетворяют условию

$$\left|f^r_\beta(t_1)-f^r_\beta(t_2)\right|\le\omega\left(|t_1-t_2|\right)\ \forall t_1,t_2,$$

где $\omega=\omega(t)$ — некоторый фиксированный модуль непрерывности.

В работе изучается поведение при $\delta\to\infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta H_\omega;P_\delta\right)_1=\sup_{f\in W^r_\beta H_\omega}\|f(\cdot)-P_\delta(f;\cdot)\|_1.$$

Отметим, что случай $\omega(t) = t^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$, был рассмотрен Л. И. Баусовым [2].

Для функции $\tau(u)$, которая задает метод суммирования интеграла Пуассона $\tau(u) = \begin{cases} (1-e^{-u})\,\delta^{r}, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ (1-e^{-u})\,u^{-r}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases}$ получаем следующее утверждение

Теорема. Пусть для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ выполнены условия

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt = O\left(\omega(x)\right), \quad x\int\limits_x^1 \frac{\omega(t)}{t}dt = O\left(x\omega(x)\right), \quad \lim_{u\to\infty} u^{1-r}\omega(u) > C = const,\ 0 < r < 1,$$

тогда при $\delta \to \infty$ имеет место оценка

$$\mathcal{E}\left(W^{r}_{\beta}H_{\omega}; P_{\delta}\right)_{1} = \frac{1}{\delta^{r}}A(\omega,\tau) + O\big(\tfrac{1}{\delta}\big),$$
$$A(\omega,\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\big(\tfrac{1}{\tau}\big)\left|\int\limits_0^{\infty} \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| dt = O\big(\omega\big(\tfrac{1}{\delta}\big)\big).$$

1. А. И. Степанец, *Методы теории приближения.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, Ч.I, 2002.

2. Л. И. Баусов, *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами,* Изв. вузов. Математика, Изд. гос. ун-та, Казань, **55**, № 6 (1966), 3–17.

Волынский национальный
университет им. Леси Украинки
e-mail: mathematical@univer.lutsk.ua

Волынский национальный
университет им. Леси Украинки
e-mail: gembar@mail.lutsk.ua

* Выполнено при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант Ф25.1/043)

О наилучших полиномиальных приближениях целых трансцендентных функций

С.И.Жир, С.Б.Вакарчук

В сообщении использован предложенный Н.М.Шереметой подход к построению обобщенной шкалы роста целых функций и получены результаты, продолжающие исследования авторов [1]. Обозначим через Λ класс функций h, принимающих положительные значения, определенных на $[1,\infty)$ и таких, что функции h дифференцируемы на множестве $[1,\infty)$, строго монотонно возрастают, при $x \to \infty$ стремятся к ∞; для любого $c \in (0,\infty)$ $\lim\{h(cx)/h(x) : x \to \infty\} = 1$. Пусть G — конечная односвязная область с границей из класса С.Я.Альпера; $\mathcal{E}'_q(G)$ $(q \geqslant 1)$ — пространство аналитических в G функций f, для которых

$$\|f\|_q = \left\{\iint\limits_G |f(z)|^q dxdy\right\}^{1/q} < \infty; \quad z = x + iy;$$

$E(f,\mathcal{P}_n)_q$ — наилучшее приближение функции $f \in \mathcal{E}'_q(G)$ подпространством $\mathcal{P}_n$, состоящим из алгебраических полиномов степени не превосходящей n в метрике пространства $\mathcal{E}'_q(G)$. Имеет место следующая

Теорема. Пусть $\alpha \in \Lambda$; $\mathcal{F}(x,c) := \alpha^{-1}(c\cdot\alpha(x))$, где $c \in (0,\infty)$ — произвольная постоянная, α^{-1} — функция, обратная α; начиная с некоторого $x = x_1$ для любого $c \in (0,\infty)$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{d\mathcal{F}(x,c)}{d\ln x} \leqslant A\Big(exp\big(\mathcal{F}(x,c)\big)\Big)^{B}$$

$(0 < A, B < \infty$ — некоторые константы); λ — конечное неотрицательное число. Если для функции f, принадлежащей пространству $\mathcal{E}_q^{'}(G)$, выполнено равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\Big(\ln\ln 1/\sqrt[n]{E(f,\mathcal{P}_n)_q}\Big)} = \lambda,$$

то оно является необходимым и достаточным для того, чтобы f была целой трансцендентной функцией обобщенного α-порядка $\widetilde{\rho_\alpha}(f) = \max(\lambda, 1)$.

1. С. Б. Вакарчук, С.И.Жир, *О наилучших полиномиальных приближениях целых трансцендентных функций обобщенного порядка,* Укр. мат. журн., **60**, №8 (2008), 1011–1026.

Академия таможенной службы Украины

Днепропетровский университет экономики и права
e-mail: sbvakarchuk@mail.ru

К неравенству Лебега для функций многих переменных

П.В.Задерей, Р.В. Товкач

Пусть $R^d - d$–мерное евклидово пространство с вещественными элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_dy_d$; $T^d = [0, 2\pi)^d$, а $L-$ пространство интегрируемых по Лебегу 2π периодических по каждой переменной функций $f(x),\ x \in T^d$, $C = L_\infty-$ пространство непрерывных функций $f(\cdot) \in L_1$, соответственно, с нормой

$$\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{T^d} |f(x)|dx, \quad \|f\|_C = \|f\|_{L_\infty} = \max_{x\in T^d} |f(x)|.$$

Обозначим через $\diamondsuit_n$ множество векторов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$ с целочисленными координатами

$$\diamondsuit_n = \{k : k = (k_1, \ldots, k_d) : |k| := |k_1| + \ldots + |k_d| \le n, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, d}\},$$

а через $\Gamma_n^\diamondsuit$ обозначим множество тригонометрических полиномов с гармониками из $\diamondsuit_n$, т.е.

$$\Gamma_n^\diamondsuit = \{t_n^\diamondsuit(x) : t_n^\diamondsuit(x) = \sum_{k\in\diamondsuit_n} a_k e^{i(k,x)}\}.$$

Пусть далее

$$S_n^\diamondsuit(f;x) = \sum_{k\in\diamondsuit_n} \widehat{f}(k)e^{i(k,x)}-$$

частная сумма ряда Фурье функции $f(\cdot) \in L_1$, а

$$E_n^\diamondsuit(f)_p = \inf_{t_n^\diamondsuit\in} \|f(x) - t_n^\diamondsuit(x)\|_p, \quad p = 1, \infty-$$

наилучшее приближение функции $f \in L_p,\ p = 1, \infty$ полиномами из $\Gamma_n^\diamondsuit$.

Теорема. Пусть $f \in L_p,\ p = 1, \infty$. Тогда

$$\|f(x) - S_n^\diamondsuit(f;x)\|_p \le B(d)\sum_{k=0}^{n} E_{n+k}^\diamondsuit(f)_p \frac{ln^{d-1}(k+2)}{k+1},$$

где $B(d)$ положительные постоянные, зависящие лишь от d.

Киевский национальный университет
технологий и дизайна
e-mail: ZadereyPV@ukr.net

Волынский национальный университет
им. Л.Украинки
e-mail: –

Наближення функцій з класу H^α їх бігармонійними інтегралами Пуассона в інтегральній метриці

Jozef Zajac, Тетяна Степанюк

Нехай L – простір 2π-періодичних, сумовних на періоді функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Множину функцій $f \in L$, які задовольняють нерівність: $|f(x+h) - f(x)| \leq |h|^\alpha,\ \ h \in R,\ \ 0 < \alpha \leq 1$, будемо позначати, як прийнято, через H^α (див., наприклад, [1, с.15] і називати класом Гельдера порядку α.

Величину $B_\delta(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),\quad \delta > 0$, де $\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt$ називають бігармонійним інтегралом Пуассона функції f.

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha; B_\delta\right)_L = \sup_{f \in H^\alpha} \left\| f\left(x\right) - B_\delta\left(f;x\right)\right\|_L,$$

де $B_\delta(f;x)$ — бігармонійний інтеграл Пуассона, будемо називати, наслідуючи О. І. Степанця [1], задачею Колмогорова–Нікольського.

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta) = \varphi(B_\delta;\delta)$, така, що при $\delta \to \infty$ $\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_L = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то кажуть, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для бігармонійного інтеграла Пуассона $B_\delta(f,x)$ на класі H^α в метриці простору L.

Основною метою є вивчення асимптотичної поведінки величин $\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_L = \sup\limits_{f \in H^\alpha} \|f(x) - B_\delta(f,x)\|_L,\ \ \delta \to \infty$.

Теорема. При $\delta \to \infty$ має місце оцінка

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha; B_\delta\right)_L = \frac{3(1-\alpha)}{2}\gamma(\alpha) \sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^\alpha} - \frac{1-3\alpha}{2}\gamma(\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \tag{6}$$

$$2^{\alpha-1} \leq \gamma(\alpha) \leq 1.$$

Рівність (6) дозволяє записати першу та другу константи Колмогорова–Нікольського.

Література

1. Степанец А.И, *Классификация и приближение периодических функций.* — К.: Наук.Думка, 1987. — 268 с.

2. Баусов Л.И., *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами,* II//Изв. вузов. — 1996. — **46**, № 3. — С.15–31.

State University of Applied Science in Chelm
e-mail: jzajac@kul.lublin.pl

Волинський національний університет імені Лесі Української
e-mail: *tanjuwka_cherry@mail.ru*

Асимптотика рядов, возникающих при приближении периодических функций средними Рисса и Чезаро

В. П. Заставный

Объектом исследования работы являются следующие ряды

$$G_\delta^\beta(r,Q,\alpha,a,b) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{(\beta+1)k}\,\frac{Q\left((\delta^\alpha-(ak+b)^\alpha)_+\right)}{(ak+b)^{r+1}}\ , \tag{1}$$

где $\beta\in\mathbb{Z}$, $\delta,\alpha,a,b>0$, $r\in\mathbb{C}$, а функция Q задана на $[0,+\infty)$ и удовлетворяет условию $Q(0)=0$. При $Q(x)=x^\mu$, $\mu>0$, и $Q(x)=\prod_{k=1}^{\mu}(x+k-1)$, $\mu\in\mathbb{N}$, эти ряды возникают при приближении периодических функций соответственно средними Рисса и средними Чезаро. При $Q(x)=\prod_{k=1}^{\mu}(x+k-1)$, $\mu\in\mathbb{N}$, $\alpha=1$, $r\in\mathbb{N}$, $a=2$, $b=1$, $\delta\in\mathbb{N}$, эти ряды возникли в работе Надя [1]. В случае $Q(x)=x$, $\alpha=1$, $r\in\mathbb{N}$, $a=2$, $b=1$, $\delta\in\mathbb{N}$, асимптотическое разложение рядов (1) по степеням δ при $\delta\to+\infty$ найдено в работах Теляковского и Баскакова [2,3].

Нами найдены асимптотические разложения рядов (1) при $\delta\to+\infty$ в случае, когда Q – алгебраический многочлен. Выпишем эти разложения при $\beta\in 2\mathbb{Z}$.

Теорема 1. Пусть Q – алгебраический многочлен степени $\mu\in\mathbb{N}$, для которого точка $x=0$ является нулём кратности $\mu_0\in\mathbb{N}$. Тогда для любого $m\in\mathbb{N}$, $m>\max\{\alpha\mu-\operatorname{Re} r;\mu_0\}$, при $\delta\to+\infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}G_\delta^2(r,Q,\alpha,a,b) = &\sum_{p=0}^{\mu}\frac{(-1)^pQ^{(p)}(\delta^\alpha)}{p!}\,a^{\alpha p-r-1}\widetilde{\zeta}\left(r+1-\alpha p,\frac{b}{a}\right)\\ &+\sum_{k=\mu_0+1}^{m}\frac{e_{k-1}\left(\frac{\delta-b}{a}\right)}{2(k-1)!}\cdot\frac{a^{k-1}A_k(r,Q,\delta^\alpha,\alpha)}{\delta^{r+k}}+O\left(\frac{1}{\delta^{r+m+1-\alpha\mu}}\right)\ .\end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{\zeta}(s,u)$ – целая по s функция, равная при $\operatorname{Re} s>0$ сумме $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+u)^{-s}$, $A_k(r,Q,x,\alpha):=\sum\limits_{p=0}^{\mu}\frac{(-1)^pQ^{(p)}(x)x^p}{p!}\cdot\frac{\Gamma(r-\alpha p+k)}{\Gamma(r-\alpha p+1)}$, $e_k(x)$ – периодические сплайны Эйлера.

References

1. B. Nagy, *Approximation der Funktionen durch die aritchmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen,* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math., **11** (1946), 71–84.

2. С. А. Теляковский, *О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера,* Укр. мат. журн., **21**, 3(1969), 334–343.

3. В. А. Баскаков, С. А. Теляковский, *О приближении дифференцируемых функций суммами Фейера,* Матем. заметки, **32**, 2(1982), 129–140.

Донецкий национальный
университет
e-mail: zastavn@rambler.ru

Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на многомерном торе с периодическим весом Якоби

Алексей Иванов

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $T^d = (-\pi, \pi]^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, $\alpha_i \geq -1/2$, $v_\alpha(x) = \prod\limits_{i=1}^{d} |\sin x_i|^{2\alpha_i+1}$, $dv_\alpha(x) = v_\alpha(x)dx$, $L_{2,\alpha}(T^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{T}^d$ функций с нормой $\|f\|_{2,\alpha}^2 = \int\limits_{T^d} |f(x)|^2 dv_\alpha(x) < \infty$, $E_R(f)_{2,\alpha}$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\alpha}(T^d)$ тригонометрическими полиномами со спектром в теле $V_R = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|(|x_i| + 2\alpha_i + 1) < R^2\right\}$.

С помощью дифференциально-разностных операторов

$$D_i y(x) = \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} + (\alpha_i + 1/2)\frac{y(x) - y(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_d)}{\operatorname{tg} x_i}, \quad i = 1, \dots, d$$

в $L_{2,\alpha}(T^d)$ можно определить полную ортогональную систему тригонометрических полиномов $\{e_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$, оператор обобщенного сдвига $\tau_\alpha^t f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}_n e_n^\alpha(t) e_n^\alpha(x)$ и модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f)_{2,\alpha} = \sup_{t\in B_\delta} \left(\int_{T^d} (\tau_\alpha^t |f(y) - f(x)|^2)|_{y=x} dv_\alpha(x)\right)^{1/2}, \quad \delta > 0, \quad B_\delta = [-\delta, \delta]^d.$$

Для дифференциального оператора

$$L_\alpha u(x) = \sum_{i=1}^{d} \left\{\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} + \frac{(2\alpha_i + 1)}{\operatorname{tg} x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right\}$$

задача на собственные значения

$$\begin{cases} -L_\alpha u = \lambda u, \quad L_\alpha u \in L_{2,\alpha}(B_\delta) \\ u|_{\partial B_\delta = 0} \end{cases}$$

имеет минимальное положительное собственное значение $\lambda_1(\delta)$, которое непрерывно и убывает по $\delta > 0$, $\lambda_1(\delta) \to +\infty$ $(\delta \to 0 + 0)$. Пусть $R > 0$ и $\delta_R > 0$ таковы, что $\lambda_1(\delta_R) = R^2$, $B_{2\delta_R} \subset T^d$.

Теорема. Если $\alpha_i \geq -1/2$, $i = 1, \dots, d$, то для любой $f \in L_{2,\alpha}(T^d)$ справедливо точное неравенство

$$E_R(f)_{2,\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\omega(2\delta_R, f)_{2,\alpha}.$$

Теорема обобщает результаты Н.И. Черныха, В.А. Юдина, А.Г. Бабенко, Д.В. Чертовой на многомерный весовой случай.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00564).

Тульский государственный
университет
e-mail: d_bringer@mail.ru

Гармонический анализ и точные неравенства Джексона в пространствах $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ с весом

Валерий Иванов

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$, $G(R)$ — конечная группа отражений, порожденная системой корней R, $v_k(x) = \prod\limits_{\alpha\in R_+} |(\alpha,x)|^{2k(\alpha)}$ — степенной вес, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней R и функцией $k(\alpha) : R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно $G(R)$, $c_k = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx$, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x)\,dx$, $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций с нормой $\|f\|_{2,k}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 d\mu_k(x) < \infty$.

В конце 80-х годов 20-го века Ч. Данклем был предложен подход к построению гармонического анализа в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$. В его работах, а также в работах М. Реслер, М. де Же, К. Тримеш и других авторов он прибрел достаточно законченный вид. Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ осуществляется с помощью дифференциально-разностных операторов и интегральных преобразований Данкля. Если $e_1, ..., e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$, то дифференциально-разностные операторы Данкля определяются равенствами

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)(\alpha, e_j)\frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{(\alpha, x)}, \quad j = 1, ..., d.$$

Для $y \in \mathbb{R}^d$ система $D_j f(x) = y_j f(x)$, $\quad f(0) = 1$ имеет единственное решение $E_k(x,y)$, которое продолжается до аналитической в $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ функции. Для обобщенной экспоненты $e_k(x,y) = E_k(ix,y)$ выполнены многие свойства, аналогичные свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$.

Разложение функций из $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля

$$\widehat{f}^k(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}d\mu_k(x), \quad f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}^k(y)\, e_k(x,y)\, d\mu_k(y).$$

Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ нашел широкое применение в математической физике, теории вероятностей, теории функций. Доклад будет посвящен его применению в теории приближений. Будут обсуждаться определения операторов обобщенного сдвига, модулей непрерывности, величины наилучшего приближения целыми функциями и доказательство точных неравенств Джексона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00564).

Тульский государственный
университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Об алгоритме склейки

И. П. Иродова

Описывается алгоритм склейки, который позволяет от кусочно-полиномиальных приближений переходить к приближению гладкими сплайнами, не меняя порядок аппроксимации.

Пусть $Q_0 = [0,1]^d$, x - вершина куба Q_0. От Q_0 перйдем к кубу Q_x, который получается гомотетией Q_0 относительно вершины x с коэффициентом 3. Куб Q_x разделим на 2^{nd} равных кубов, а затем возьмем пересечение этих кубов с кубом Q_0. Полученное разбиение Q_0 на параллелепипеды обозначим $F_n(x)$.

Через $P_k(\Pi)$ обозначим пространство кусочно-полиномиальных функций степени не более $k-1$ по каждой из d переменных, подчиненных разбиению Π, а $S_k(\Pi) = P_k(\Pi) \bigcap C^{k-2}(Q_0)$ - пространство сплайнов.

Кроме того, пусть

$$e_k(f, F_n(x))_p = dist_{L_p}\left(f, P_k(F_n(x))\right)$$

и

$$\|f - g_{nx}\|_p = e_k(f, F_n(x))_p.$$

Диадическим пространством Бесова $B_p^{\lambda\theta}(F(x))$, построенном по семейству $F(x)$, будем называть множество функций $f \in L_p(Q_0)$, для которых величина

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n\lambda}e_k(f, F_n(x)\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

конечна.

Теорема. Для функции $f \in B_p^{\lambda\theta}$, $0 < p \le \infty$ и любого n найдется сплайн s_n из пространства $S_k(U_{2^n(k-1)})$, $k \ge 2$ такой, что для любого $0 \le \gamma \le \lambda$

$$\|f - s_n\|_{B_p^{\gamma\theta}} \le c \cdot \sum_x \|f - g_{nx}\|_{B_p^{\gamma\theta}(F(x))};$$

здесь суммирование идет по всем вершинам x куба Q_0, а через U_r обозначено равномерное разбиение Q_0 на кубы с длиной ребра $\frac{1}{r}$.

Если $\gamma = 0$, то $B_p^{\gamma\theta}$ и $B_p^{\gamma\theta}(F(x))$ нужно заменить на $L_p(Q_0)$.

Ярославский Государственный университет
им. П.Г.Демидова
e-mail: IrinaIrodova@gmail.com

Апроксимативні властивості тригармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій малої гладкості [1]

Інна Кальчук, Уляна Грабова

Нехай $f \in L$. Величину $P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\delta)\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$, $\delta > 0$, де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f,

$$\lambda_\delta(k) = \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\Big)e^{-\frac{k}{\delta}},$$

називають тригармонійним інтегралом Пуассона функції f.

Вивчається асимптотична поведінка при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(x) - P_3(\delta; f; x)\|_C,$$

[1]Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.1/043)

де $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ — клас неперервних 2π-періодичних (ψ,β)-диференційовних функцій, впроваджений О.І. Степанцем (див., наприклад [1, Гл. IX]).

Для тригармонійного інтеграла Пуассона покладемо

$$\tau(u)=\begin{cases}\left(1-\left(1+\gamma u+\theta u^2\right)e^{-u}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le \frac{1}{\delta},\\ \left(1-\left(1+\gamma u+\theta u^2\right)e^{-u}\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge \frac{1}{\delta},\end{cases}$$

де $\gamma=\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\delta,\ \ \theta=\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2\delta^2$, а $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u\ge 1$.

Теорема. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}'_0=\mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}'$, *(див., наприклад, [1, с. 159]) функція* $g(u)=u^3\psi(u)$ *опукла вгору або донизу на* $[b,\infty)$, $b\ge 1$. *Тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_3(\delta))_C=\psi(\delta)A(\tau)+O\biggl(\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{\delta^4}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du\biggr),$$

де $A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt$ *і справедлива оцінка*

$$A(\tau)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\biggl(\frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(\delta)du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\biggr)+O\biggl(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u\psi(u)du\biggr).$$

Література

1. Степанец А.И. Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.І. — 427 с.

Волинський національний університет
e-mail: kalchuk_i@ukr.net

Волинський національний університет
e-mail: grabova_u@ukr.net

On Finite Difference Properties of Moduli of Smoothness of Conformal Mapping of Simply Connected Domains

Olena Karupu

Let G be a simply connected domain in the complex plane bounded by a smooth Jordan curve Γ, $\tau=\tau(s)$ be the angle between the tangent to Γ and the positive real axis, $s=s(w)$ be the arc length on Γ. Let $w=\varphi(z)$ be a homeomorphism of the closed unit disk $\overline{D}=\{z:|z|\le 1\}$ onto the closure $\overline{G}$ of the domain G, conformal in the open unit disk D. Let $z=\psi(w)$ be the function inverse to the function $w=\varphi(z)$.

Let $\omega(\delta)$ be normal majorant satisfying some additional conditions.

Theorem 1. If modulus of smoothness $\omega_k(\tau(s),\delta)$ of order k for the function $\tau(s)$ satisfies condition $\omega_k(\tau(s),\delta)=O(\omega(\delta))(\delta\to 0)$, then the uniform curvilinear modulus of smoothness of the function $\varphi(z)$ on ∂D satisfies the condition $\widetilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\varphi,\delta)=O(\mu(\delta))(\delta\to 0)$, where $\mu(\delta)$ is some integral majorant.

Theorem 2. If modulus of smoothness $\omega_k(\tau(s),\delta)$ of order k for the function $\tau(s)$ satisfies condition $\omega_k(\tau(s),\delta)=O(\omega(\delta))(\delta\to 0)$, then the uniform curvilinear modulus of smoothness of the function $\psi(w)$ satisfies the condition $\widetilde{\omega}_{k,1,\Gamma}(\psi,\delta)=O(\nu(\delta))(\delta\to 0)$, where $\nu(\delta)$ is some integral majorant.

Let G_1 and G_2 be the simply connected domains in the complex plane bounded by the smooth Jordan curves Γ_1 and Γ_2. Let $\tau_1(s_1)$ be the angle between the tangent to Γ_1 and the positive real axis,

$s_1(\zeta)$ be the arc length on Γ_1. Let $\tau_2(s_2)$ be the angle between the tangent to Γ_2 and the positive real axis, $s_2(w)$ be the arc length on Γ_2. Let $w = f(\zeta)$ be a homeomorphism of the closure $\overline{G_1}$ of the domain G_1 onto the closure $\overline{G_2}$ of the domain G_2, conformal in open domain G_1.

Theorem 3. If moduli of smoothness $\omega_k(\tau_1(s_1),\delta)$ and $\omega_k(\tau_2(s_2),\delta)$ of order k ($k\in\mathbb{N}$) for the functions $\tau_1(s_1)$ and $\tau_2(s_2)$ satisfy conditions $\omega_k(\tau_1(s_1),\delta)=O(\omega(\delta))(\delta\to 0)$, $\omega_k(\tau_2(s_2),\delta)=O(\omega(\delta))(\delta\to 0)$, then the uniform curvilinear modulus of smoothness $\widetilde{\omega}_{k,1,\Gamma_1}(f,\delta)$ of the function $f(\zeta)$ on Γ_1 satisfies the condition $\widetilde{\omega}_{k,1,\Gamma_1}(f,\delta)=O(\sigma(\delta))(\delta\to 0)$, where $\sigma(\delta)$ is some integral majorant.

National Aviation
University
e-mail: karupu@ukr.net

Об интерполяции однолистных функций рациональными дробями

Эдуард Кирьяцкий

Пусть M – замкнутое конечное или бесконечное множество точек из односвязной области D. Обозначим через $P(M)$ множество всех полиномов со старшими коэффициентами равными единице, все корни которых принадлежат множеству M.

Теорема. *Пусть $f(z)$ – голоморфная в области D функция и $P_n(z)$, $n=1,2,\ldots$ – последовательность полиномов степеней n из $P(M)$. Для того чтобы каждое из уравнений*

$$f(z)=\frac{Q_n(z)}{P_n(z)},\ n=1,2,\ldots$$

имело в области D не более $n+1$ корней для любого полинома $Q_n(z)$ степени не выше n, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной в области D функцией вида

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0.$$

Вильнюсский технический
университет имени Гедиминаса
e-mail: Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt

Markov-Nikolskii type inequalities for monotone and monotone nonnegative polynomials

Oleksiy Klurman

Let $M_{q,p}(n,k):=\sup_{P_n\in\mathbb{P}_n}\frac{\|P_n^{(k)}\|_{L_q[-1,1]}}{\|P_n\|_{L_p[-1,1]}}$, where $\mathbb{P}_n$ denotes the set of algebraic polynomials of degree $\le n$. It is known (A. Markov [1889], V. Markov [1892], E. Hille, G. Szego and J. Tamarkin [1937], S. Nikolskii [1948], I. Daugavet and S. Rafalson [1972], V. Ivanov [1975]) that, for any $0<p,q\le\infty$,

$$M_{q,p}(n,k)\asymp\begin{cases} n^{2k+2/p-2/q}, & \text{if } k>2/q-2/p,\\ n^k(\log n)^{1/q-1/p}, & \text{if } k=2/q-2/p,\\ n^k, & \text{if } k<2/q-2/p.\end{cases}$$

Recently, T. Erdelyi [2009] considered the problem of finding the order of $M^{(l)}_{q,p}(n,k)$ where the supremum is taken over the set of all absolutely monotone polynomials of order l (i.e., polynomials P_n such that $P_n^{(m)}(x) \geq 0$ for $0 \leq m \leq l$ and $x \in [-1,1]$). In particular, he showed that, for $l \geq k/2$, $k \geq 2$, $q \geq p$,

$$M^{(l)}_{q,p}(n,k) \asymp \left(n^2/l\right)^{k+1/p-1/q}.$$

In this talk, I'll discuss the analog of the above problems for monotone and monotone nonnegative polynomials as well as the sharp Bernstein inequality for monotone polynomials.

University of Manitoba,
Canada
e-mail: lklurman@gmail.com

О приближении функций обобщенными средними Бохнера-Рисса в $H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$

Ю.С. Коломойцев

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное евклидово пространство, $n \geq 1$, $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $|x| = (x,x)^{1/2}$, $\mathbb{R}^n_+$ – подмножество точек из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами, $\mathbb{Z}^n$ – с целыми координатами; $\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}^n_+$. Единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $D^n = \{\, z = (z_1 \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;:\; |z_j| < 1,\, j = 1, \dots, n\}$.

Аналитическая в единичном поликруге D^n функция f принадлежит $H_p(D^n)$, если

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{\substack{0<\rho_j<1 \\ j=1,\dots,n}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} du_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho_1 e^{iu_1}, \dots, \rho_n e^{iu_n})|^p du_n \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Любая функция из $H_p(D^n)$, $p > 0$, раскладывается в поликруге D^n в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} c_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

где $c_k = c_{k_1,\dots,k_n}$ – коэффициенты ряда Тейлора функции f. Обобщенные средние Бохнера-Рисса функции $f \in H_p(D^n)$ определим следующим образом

$$R^{\beta,\delta}_{\varepsilon}(f,z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} (1 - (\varepsilon |k|)^\beta)^\delta_+ c_k z^k.$$

Теорема 1. Пусть $0 < p \leq 1$. Средние Бохнера-Рисса $\{R^{\beta,\delta}_{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ сходятся в $H_p(D^n)$ тогда и только тогда, когда $\delta > n/p - (n+1)/2$ и $\beta \in \mathbb{N}$ или $\beta \notin \mathbb{N}$, но $\beta > n(1/p - 1)$.

Пусть $g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} c_k z^k \in H_p(D^n)$. Оператор Δ^β, $\beta > 0$, определим равенством

$$\Delta^\beta g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} (-1)^\beta |k|^{2\beta} c_k z^k, \quad ((-1)^\beta = e^{i\pi\beta}).$$

Для оценки скорости приближения средними Бохнера-Рисса воспользуемся следующим K-функционалом

$$K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p} = \inf_g \{\|f - g\|_{H_p} + \varepsilon^\beta \|\Delta^{\beta/2} g\|_{H_p}\}.$$

Теорема 2. Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, $\delta > n/p-(n+1)/2$ и $\beta \in \mathbb{N}$ или $\beta \notin \mathbb{N}$, но $\beta > n(1/p-1)$. Тогда

$$\|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p}, \quad \varepsilon > 0$$

(двустороннее неравенство с константами, не зависящими от f и ε).

При $\beta \in (0,1) \cup \mathbb{N}$ K-функционал в теореме 2 можно заменить на специальный модуль гладкости.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк
e-mail: kolomus1@mail.ru

Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій двох змінних з заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

А.Ф. Конограй

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій двох змінних, які визначаються функцією $\Omega(t)$, яка задовольняє умови Барі-Стєчкіна (див., наприклад, [1]) (позначаємо (S) і (S_l)), деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{t_1^r}{\left(\log\frac{1}{t_1}\right)_+^{b_1}} \cdot \dfrac{t_2^r}{\left(\log\frac{1}{t_2}\right)_+^{b_2}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j=1,2; \\ 0, & \text{якщо } t_1 \cdot t_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Нами розглядаються логарифми за основою 2, крім того $\left(\log \tau\right)_+ = \max\{1, \log\tau\}$ та $b_j < r, j = 1,2,\ 0 < r < l$.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних функцій зі стандартною нормою. Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q,\ 1 \leq q < \infty$. Щоб навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді ортопроекційний поперечник класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q визначається наступним чином

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\|f(x) - \sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i(x)\right\|_q.$$

Теорема. *Нехай* $1 \leq q \leq p < \infty,\ p \geq 2,\ 1 \leq \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *задана формулою (7) з* $r > 0$, *тоді*

$$d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r}\left(\log M\right)^{-b_1-b_2+r+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Література

1. Sun Youngsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness,* Тр. мат. ин-та им.В. А. Стеклова, **219**, (1997), 356-377.

Інститут математики НАН України,
e-mail: Konogray@i.ua

Точные верхние грани норм производных на классах функций с заданной функцией сравнения

Владимир Кофанов

Для $r \in \mathbf{N}$ обозначим через L^r_∞ пространство функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для которых $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, $x \in L_\infty(\mathbf{R})$ и $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$. Положим $W^r_\infty :=\{ x \in L^r_\infty : \|x^{(r)}\|_\infty \le 1\}$.

Для $k = 0, 1, 2, ...$ пусть $\varphi \in L^{k+1}_\infty$ - $2T$-периодическая функция на оси $\mathbf{R}$, нечетная относительно 0, четная относительно $T/2$, положительная, выпуклая вверх на $(0, T)$, строго возрастающая на $[0, T/2]$ и $\varphi(0) = 0$.

Символом Ω^k_φ обозначим класс функций $x \in L^{k+1}_\infty$, таких что $\varphi^{(i)}$ является функциец сравнения для $x^{(i)}, i = 0, ..., k$, т. е. $\|x^{(i)}\|_\infty \le \|\varphi^{(i)}\|_\infty$ и если $x^{(i)}(\xi) = \varphi^{(i)}(\eta)$ для $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, то $|x^{(i+1)}(\xi)| \le |\varphi^{(i+1)}(\eta)|$.

Для произвольных $p > 0$ и отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ нами решена следующая экстремальная задача

$$\|x^{(i)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} \to \sup, \qquad i = 0, ..., k, \qquad x \in \Omega^k_\varphi,$$

с ограничением $L(x)_p \le Ł(\varphi)_p$ в случаях: 1) $k = 0$, $q \ge p$, 2) $1 \le k \le r - 1$, $q \ge 1$, где

$$L(x)_p := \sup\{(\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\}.$$

Для $p = \infty$, $k \ge 1$ эта задача была решена в работе [1].

В качестве важнейших примеров рассмотрено решение задачи на классе W^r_∞, на пространстве тригонометрических полиномов порядка $\le n$ и на классе сплайнов порядка r с равноотстоящими узлами. Рассмотрены разнообразные приложения. В частности, получены неравенства типа Колмогорова-Надя для полунорм Вейля и решена соответствующая задача Колмогорова о тройке чисел.

References

1. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos,* J.Anal.Math., **78** (1999), 263–280.

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: vladimir.kofanov@gmail.com

Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в L_p

А. А. Кошелев

Пусть W_p^{2n} ($n \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$) есть пространство функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq p < \infty$ и $f \in C(\mathbb{R}^m)$ в случае $p = \infty$, у которых $\Delta^n f$, понимаемая в смысле обобщенных функций, принадлежит $L_p(\mathbb{R}^m)$, а Q_p^{2n} – класс функций $f \in W_p^{2n}$, удовлетворяющих условию $\|\Delta^n f\|_p \leq 1$. Обозначим через $\mathcal{L}_p$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq p < \infty$ и из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. Рассмотрим величину уклонения оператора $T \in \mathcal{L}_p$ от k-й степени оператора Лапласа на классе функций Q_p^{2n}:

$$U(T)_p = \sup\{||\Delta^k f - Tf||_p : \ f \in Q_p^{2n}\}.$$

При $N > 0$ положим

$$E(N,k,n) = E(N) = E(N)_p = \inf\{U(T)_p : \ \ T \in \mathcal{L}_p, \ ||T||_{\mathcal{L}_p} \leq N\}.$$

Величину $E(N,k,n)$ (а точнее, функцию $E(N)$ переменного $N > 0$) называют наилучшим приближением k-й степени оператора Лапласа Δ^k линейными ограниченными операторами на классе элементов Q_p^{2n}. Эта задача является частным случаем задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [1]. История и состояние исследования задачи Стечкина приведены в обзорной статье [2].

Родственными являются задача отыскания наилучшей (наименьшей) константы $\mathcal{K}_p$ в неравенстве Колмогорова

$$||\Delta^k f||_p \leq \mathcal{K}_p \cdot ||f||_p^{\frac{n-k}{n}} \cdot ||\Delta^n f||_p^{\frac{k}{n}}, \quad f \in W_p^{2n},$$

и задача восстановления значений k-й степени оператора Лапласа Δ^k на элементах класса Q_p^{2n}, заданных с погрешностью δ, т. е. задача об исследовании величины

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p)_p = \inf\{U_\delta(T)_p : T \in \mathcal{L}_p\},$$

$$U_\delta(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - T\eta\|_p : \ f \in Q_p^{2n}, \ \eta \in L_p(\mathbb{R}^m), \ \|f - \eta\|_p \leq \delta\}.$$

Теорема. При любых $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$ для $k = 1$, $n = 2$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{4N} \leq E(N)_p \leq \frac{m}{(m+2)N}, \quad N > 0,$$

$$\delta^{1/2} \leq \omega(\delta)_p \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p)_p \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$1 \leq \mathcal{K}_p \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 08-01-00213.

Литература

1. С. Б. Стечкин *Наилучшее приближение линейных операторов,* Матем. заметки, **1**, № 2 (1967), 137–148.

2. В. В. Арестов *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи,* Успехи мат. наук, **51**, вып. 6 (312) (1996), 89–124.

Уральский государственный
университет им. А. М. Горького
e-mail: aakoshelev@gmail.com

Про співвідношення між нормами похідних функції та мірою області

Тетяна Магеровська*, Володимир Ільків**

Нехай $G_n(\varepsilon; f) = \{x \in [a,b] \colon |f(x)| \le \varepsilon\}$ — множина точок відрізка $[a,b] \subset \mathbb{R}$, в яких графік функції f відхиляється від нуля не більше, ніж на ε. Розглядається питання про визначення міри цієї множини для гладких функцій f та встановлення оцінок міри, які виконуються для всіх функцій з деяких класів функцій.

Очевидно, якщо клас функцій містить константи (для них $f' = 0$), то міра $\operatorname{meas} G_n(\varepsilon; f)$ множини $G_n(\varepsilon; f)$ для кожного ε може бути зокрема нулем, або числом $b-a$, яке є мірою всього відрізка $[a,b]$, в залежності від f.

За додаткових умов на похідні функції f, які виключають вказаний вище випадок, отримано таку теорему.

Позначимо $f_j(x) = \dfrac{f^{(j)}(x)}{j!}$, $j = 1, \ldots, n$, $\tilde{f}_n(x) = 1/f_n(x)$.

Теорема 1. [1] Нехай $\mathbf{C}^n_\delta[a,b]$ — множина функцій $f \in \mathbf{C}^n[a,b]$, для яких

$$|f_n(x)| \ge \delta > 0$$

на відрізку $[a,b]$, тоді справджується рівність

$$\sup_{\mathbf{C}^n_\delta[a,b]} \operatorname{meas} G_n(\varepsilon; f) = \min\Big(\frac{4}{\sqrt[n]{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\,, b-a\Big).$$

У випадку довільної вимірної множини E встановлено аналогічне твердження у вигляді нерівностей.

Теорема 2. Нехай $f_n \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $\tilde{f}_n \in \mathbf{C}^n[a,b]$, тоді для довільної вимірної множини E справджуються нерівності

$$\frac{\|f_j\|_{\mathbf{C}(E)} \cdot \|\tilde{f}_n\|_{\mathbf{C}(\tilde{E})}}{2} \ge \mathrm{C}^j_n \cdot \Big(\frac{\operatorname{meas} E}{4}\Big)^{n-j}, \qquad j = 0, 1, \ \ldots, n-1, \tag{$*$}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \operatorname{meas} E \le \min\left(-1 + \sqrt[n]{1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|f_j\|_{\mathbf{C}(E)} \cdot \|\tilde{f}_n\|_{\mathbf{C}(\tilde{E})}}{2}}\,, \frac{b-a}{4}\right),$$

де $\|f_j\|_{\mathbf{C}(E)} = \sup\limits_{x \in E} |f_j(x)|$, $\|\tilde{f}_n\|_{\mathbf{C}(\tilde{E})} = \sup\limits_{x \in \tilde{E}} |\tilde{f}_n(x)|$, $\mathrm{C}^j_n = n!/j!(n-j)!$ — біномний коефіцієнт, $\tilde{E} = \operatorname{conv} E$ — опукла оболонка множини E, $\operatorname{meas} E$ — міра Лебеґа множини E.

Нерівності $(*)$ наведено раніше у роботі [2].

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 28.1/010, проект № 29.1/005).

Література

1. В. С. Ільків, Т. В. Магеровська, *Точна константа у лемі Пяртлі,* Міжнар. конф. до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди. Тези доповідей. 8–13 червня 2009, Чернівці. - С. 56-58.

2. В. С. Ільків, Т. В. Магеровська, *Про нерівність між нормами похідних функції та мірою області,* Int. Conf. "Functional methods in approximation theory and operator theory III dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk, August 22–26, 2009, Volyn, Ukraine. - С. 48-49.

*Львівський ДУ внутрішніх справ
вул. Городоцька 26,
79007, Львів, Україна
e-mail: magerovska@mail.ru

**НУ "Львівська Політехніка"
вул. С. Бандери 12,
79013, Львів, Україна
e-mail: ilkivv@i.ua

K-Monotone and One-Sided Weighted Approximation on the Real Line

Oleksandr Maizlish

The well-known "Bernstein approximation problem" deals with the possibility of polynomial approximation on the real line with weights. Given a continuous function $W : \mathbb{R} \to (0, 1]$, the problem is to determine whether the set of all algebraic polynomials is dense in C_W, the space of all continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)W(x) = 0$, equipped with the norm $\|f\|_W := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)W(x)|$. In this talk, we will discuss the possibility of weighted approximation with constraints, namely, k-monotone and one-sided approximation with Freud's weights $W_\alpha(x) := e^{-|x|^\alpha}, \alpha \geq 1$.

References

1. Oleksandr Maizlish, *Shape preserving approximation on the real line with exponential weights,* J. Approx. Theory, **157** (2009), no. 2, 127–133.

University of Manitoba
e-mail: ummaizli@cc.umanitoba.ca

Problems on the curves in a complex plane related with classic approximation theorems

J.I.Mamedkhanov

We consider the following model case of Jackson, Jackson-Bernstein, Bernstein and Nikolsky-Timan-Dzjadyk classic theorems.

Theorem (Jackson's). Let $f \in Lip_{[a,\, b]}\alpha,\ (0 < \alpha \leq 1)$, then

$$E_n\,(f,\, [a,\, b]\,) \leq \frac{const}{n}.$$

Theorem (Jackson-Bernstein). In order that

$$f \in Lip_{[0,\, 2\pi]}\alpha,\, (0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow E_n\,(f;\, [0,\, 2\pi]\,) \leq \frac{const}{n^\alpha}.$$

Theorem (Bernstein). Let $f_0\,(\theta) = f\,(\cos\theta) = f(x),\ x = [-1, 1]$.

In order that

$$f_0\,(\theta) \in Lip_{[0,\,2\pi]}\alpha,\ \ (0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow E_n\,(f;\ [-1,\,1]\,) \le \frac{const}{n^{\alpha}}.$$

Theorem (Nikolsky-Timan-Dzjadyk) In order that

$$f \in Lip_{[-1,1]}\alpha \quad (0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow \exists P_n$$

for which $\forall x \in [-1,\,1]$

$$|f\,(x) - P_n\,(x)\,| \le const\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{|x|}{n^2}\right)^{\alpha}.$$

The problems we are interested may be formulated in a general form:
What necessary and sufficient conditions should (must) satisfy a class of curves in a complex plane, in order appropriate classic theorem of approximation be fulfilled (true) on it.

These problems are urgent both in the metric C and in the metric L_p . Notice that the problem related with Jackson-Bernstein theorem was formulated by J.Walsh and the problem related with Jackson theorem by D.Newman.

Baku State University;
Institute of Mathematics and Mechanics,
National Academy of Sciences of Azerbaijan.
e-mail: jamalmamedkhanov@rambler.ru

Приближение средними Стеклова функций из обобщённых М-пространств Лоренца.

Л. В. Матвиюк (Odessa)
lmatviuk@yandex.ru

Пусть функция $\psi(x)$ — не убывает, неотрицательна на (0,1), а функция $M(x)$ — возрастает, неотрицательна на $[0,+\infty)$, $M(+0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x)=+\infty$.
Будем далее считать, что функции $M(x)$, $\psi(x)$ и число $\gamma\in[0,+\infty)$ таковы, что

$$\int\limits_0^1 M(\psi(x))\frac{dx}{x^{\gamma}} < +\infty.$$

Обозначим через $M_{\psi,\gamma}$— класс всех измеримых на единичном кубе $J_N=[0,1]^N$ $(N\in\mathbf{N})$,1—периодических по каждой переменной функций $f\in L(J_N)$, для которых

$$||f||^*_{M_{\psi,\gamma}} = \int\limits_0^1 M(\frac{\psi(x)}{x}\int\limits_0^x f^*(t)dt)\frac{dx}{x^{\gamma}} < +\infty.$$

Здесь $f^*(t)$— невозрастающая на (0,1] функция, равноизмеримая с функцией $|f(t)|$ на J_N. Пусть $f\in M_{\psi,\gamma}$. Назовём

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f,\delta) = \sup_{0\le|h_i|\le\delta(i=1,\ldots,N)} ||f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x})||^*_{M_{\psi,\gamma}}, \qquad f.$$

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2 — условию, если существует постоянная $c_M\ge 0$, такая что для всех $x\in(0,+\infty)$ выполняется неравенство

$$M(2x) \le c_M M(x).$$

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет $\Delta^{/}$ — условию, если существует постоянная $c_M \geq 0$, такая что для всех $x, y \in (0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$M(xy) \leq c_M M(x) M(y).$$

Далее, пусть $f \in L(J_N)$. Для любого $h > 0$ функция $f_h(\bar{x}) = (2h)^{-N} \int\limits_{J(\bar{x},h)} f(\bar{t}) d\bar{t}$ называется средним Стеклова по $J(\bar{x}, h)$ — N-мерному кубу с центром в точке $\bar{x} \in J_N$ и длиной ребра $2h$.

Доказано, что если функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2 — условию или выпуклая на $(0, +\infty)$, то существует постоянная $c_M > 0$, такая что для всех $h \in (0, 1]$ выполняется неравенство:

$$\|f - f_h\|^*_{M_{\psi,\gamma}} \leq c_M \omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, h).$$

Если же функция $M(x)$ удовлетворяет $\Delta^{/}$— условию, то существует постоянная $c_M > 0$, такая что для всех $h \in (0, 1]$ и для всех $i = 1, \ldots, \mathbf{N}$ выполняется неравенство:

$$\left\| \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \right\|^*_{M_{\psi,\gamma}} \leq c_M M(h^{-1}) \omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, h).$$

Автором ранее были получены такие оценки для функций из обобщённых пространств Лоренца ([1]).

Литература

1. Л. В. Матвиюк, *Теоремы вложения классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности(наилучших приближений)// Канд. дисс., Одесса-1990.*

Применение метода промежуточного приближения в неравенстве Джексона

А.В. Мироненко

Применив метод промежуточного приближения классом функций с ограниченной первой производной Н. П. Корнейчук установил неравенство Джексона с точной константой для тригонометрических полиномов. Тогда же это неравенство было им перенесено при помощи замены переменных и на алгебраические полиномы:

Теорема 1 (Н. П. Корнейчук). Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $E(f, P^n) \leqslant \omega_1 \left(f, \frac{\pi}{2} \frac{b-a}{(n+1)} \right)$.

Непосредственное применение метода промежуточного приближения классом функций с ограниченной второй производной позволяет установить следующее неравенство:

Теорема 2. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $E(f, P^n) < 5\,\omega_2 \left(f, \frac{\pi}{\sqrt{8}} \frac{b-a}{2(n+1)} \right)$.

Отметим, что в случае класса функций с ограниченной третьей производной одно из ключевых утверждений метода приниципиально не верно.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 08-01-00325).

Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, Россия
e-mail: a_mironenko@mail.ru

Об одном соотношении квазинорм алгебраического многочлена

В.Р. Мисюк

В теории полиномиальной и рациональной аппроксимации хорошо известны многие соотношения между нормами полиномов или рациональных функций и, вообще гововоря в различных пространствах. Так, в [1] получена оценка нормы рациональной функции на границе круга через норму этой же рациональной функции по площади круга. В данном сообщении приводится аналог этого соотношения для алгебраического полинома. Введём необходимые обозначения. Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а ∂D – его граница. Обозначим через $L_p(\partial D)$, $0 < p \leqslant \infty$, пространство Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(\partial D)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Именно, $f \in L_p(\partial D)$, если

$$\|f\|_{L_p(\partial D)} = \left(\int\limits_{\partial D} |f(\xi)|^p \, |d\xi| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \text{ при } \ 0 < p < \infty \ ,$$

$$\|f\|_{L_p(\partial D)} = ess \sup_{\xi \in \partial D} |f\,(\xi)| < \infty \ \text{ при } \ p = \infty \ .$$

Пусть, далее, m_2 — плоская мера Лебега в комплексной области $\mathbb{C}$. Для $0 < p \leqslant \infty$ через $L_p(D)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на D относительно плоской меры m_2 с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Именно, $f \in L_p(D)$, если f – m_2-измерима и

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_{D} |f(z)|^p \, dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \text{ при } \ 0 < p < \infty \ ,$$

$$\|f\|_{L_p(D)} = ess \sup_{z \in D} |f\,(z)| < \infty \ \text{ при } \ p = \infty \ .$$

Через $\mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, будем обозначать множество алгебраических многочленов степени не выше n.

Теорема. *Пусть* $0 < p < \infty$, $P_n \in \mathcal{P}_n$. *Тогда*

$$\|P_n\|_{L_p(\partial D)} \leqslant c(p)\, n^{\frac{1}{p}} \ \|P_n\|_{L_p(D)} \ .$$

Отметим, что это неравенство является точным в смысле входящих в него параметров n и p.

Литература

1. В. Р. Мисюк *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры,* Труды Института математики НАН Беларуси, **9** (2001), 105–108.

Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы
e-mail: vmisuk@gmail.com

УДК 517.5 Обобщенные константы Лебега и сходимость в среднем рядов Фурье- Якоби

В.П. Моторный*, С.В. Гончаров*, О.В. Моторная**

*Днепропетровский национальный университет, **Киевский национальный университет

В работе изучается сходимость рядов Фурье-Якоби в пространствах $L_{p,A,B}$ в случаях, когда константы Лебега неограничены. Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)-$ многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ (\alpha > -1, \beta > -1)$. Через $L_{p,A,B}$ обозначим пространство измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f, для которых $fw^{1/p} \in L^p$, где весовая функция $w(x) = (1-x)^A(1+x)^B,\ \ A, B > -1$. Норма $\|f\|_{p,A,B} = \|fw^{1/p}\|_p$. Если $A = B = 0$, то $\|f\|_{p,0,0} = \|f\|_p = \{\int_{-1}^1 |f(x)|dx\}^{1/p}$.

Через $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ будем обозначать частную сумму порядка n ряда Фурье-Якоби функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Частные суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ можно рассматривать как оператор действующий в некотором подпространстве X пространства L^1_ρ. Норма этого оператора

$$\|S_n^{\alpha,\beta}\|_X = \sup_{\|f\|_X \le 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X$$

называется константой Лебега.

Для любых $n, p, \theta, \delta, \alpha, \beta, A, B$ положим

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|f/\rho(n,\theta,\delta)\|_{p,A,B} \le 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p,A,B},$$

где $\rho(n,\theta,\delta,x) = (\sqrt{1-x}+1/n)^\theta(\sqrt{1+x}+1/n)^\delta,\ \theta, \delta \in R^1$. Константы $D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B}$ называются обобщенными константами Лебега, они совпадают с классическими константами Лебега если $\gamma = \delta = 0$. Получены оценки порядка роста обощенных констант Лебега, установлены условия, при выполнении которых, обобщенные константы Лебега ограничены. Это позволило получить оценки уклонений частных сумм $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ рядов Фурье-Якоби от функций f в пространстве $L_{p,A,B}$. Оказалось, что в случаях, когда обобщенные константы Лебега ограничены (а константы Лебега неограничены) частные суммы рядов Фурье-Якоби функции f могут осуществлять приближение функции f по порядку не хуже наилучшего. Результаты работы дополняют исследования Х. Полларда, Дж. Неймана, У. Рудина, Г. Винга, Б. Маккенхоупта, С.А. Агаханова, Г.И. Натансона, В.М. Бадкова, П.К. Суетина, В.П. Моторного, С.З. Рафальсона и других математиков.

Об одном обобщении неравенства Н.П.Корнейчука

Т.В.Наконечная

В работе [1] Н.П.Корнейчуком была получена верхняя оценка приближения кусочно-постоянными функциями на классе H^ω. Для получения данной оценки Н.П.Корнейчуку пришлось доказать следующее элементарное неравенство.

Лемма 1. При всех $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $0 < p \le 3$ справедливо неравенство

$$(x+y)^{p+1} \ge 2^p\left(xy^p + yx^p\right),$$

которое при $p > 3$ и некоторых $x > 0, y > 0$ уже не выполняется.

Получено обобщениие этого неравенства на случай n переменных. Верна следующая теорема.

Теорема 1. Для всех $x_i > 0 (i = 1, 2, \ldots, n), n \in N, n \geq 2$ и $q \in \left(0, \frac{n+1}{n-1}\right)$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{q+1} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^q \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - x_k}{n-1}\right),$$

которое при $q > \frac{n+1}{n-1}$ и некоторых $x_i > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ уже не выполняется.

Если $q = \frac{n+1}{n-1}$, то данное неравенство справедливо только для значений $n = 2, 3$.

Литература

1. Н.П.Корнейчук *Сплайны в теории приближения.*– М.Наука, 1984.– 452 с.

2. В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, В.М.Фомин *Оптимальное управление.*– М.Наука, 1979.– 287 с.

ОКВУЗ "Институт предпринимательства
"Стратегия"" г.Желтые Воды
e-mail: naktanya@ukr.net

Оценки для нормы интерполяционного проектора

М. В. Невский

Пусть $n \in \mathbb{N}, Q_n := [0,1]^n$. Через $C(Q_n)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|,$$

а через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1.

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Поставим ему в соответствие квадратную матрицу $\mathbf{A}$ порядка $n+1$, по строкам которой записаны координаты вершин S; последний столбец $\mathbf{A}$ состоит из 1. Будем считать $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Положим

$$\xi(S) := \min\left\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\right\}.$$

Здесь σS есть результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Пусть $\alpha(S)$ есть минимальное $\sigma > 0$ такое, что Q_n принадлежит гомотетической копии S с центром гомотетии в некоторой точке и коэффициентом σ. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, принадлежащего S и параллельного i-й координатной оси $(1 \leq i \leq n)$. Число $d_i(S)$ называется i-м осевым диаметром симплекса S.

Теорема 1. Для любого невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|.$$

Отдельно рассмотрим случай $S \subset Q_n$. Пусть $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Ниже $\|P\|$ есть норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Теорема 2. Имеют место неравенства

$$n \leq \alpha(S) \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1.$$

Кроме того, существует константа $c > 0$ такая, что $\|P\| \geq c\sqrt{n}$.

Часть из приведенных соотношений установлена в [1], [2].

Литература

1. М. В. Невский, *Об одном свойстве n-мерного симплекса,* в печати.

2. М. В. Невский, *Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора,* Модел. и анализ информ. систем, **16:1** (2009), 24–43.

Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова
e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

Приближение аналитических функций r–повторными операторами Валле-Пуссена

О.А. Новиков , Т.В. Шулик

Следуя А.И. Степанцу [1], обозначим $C^q_{\beta,\infty}$, $q \in (0;1)$, $\beta \in R$, классы непрерывных 2π–периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\ dt,$$

в которой $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \leq 1$.

Пусть $p_1,\ p_2, ..., p_r$ — произвольные натуральные числа такие, что $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$, тогда r–повторные суммы Валле-Пуссена определим следующим соотношением

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} ... \frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f,x).$$

Для верхних граней уклонений r–повторных сумм Валле-Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ получено утверждение.

Теорема. Пусть $q \in (0;1), \beta \in R$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_r \overset{\text{df}}{=} \Sigma_p < n$. Тогда при $n - \Sigma_p \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,p}\right) \overset{\text{df}}{=} \sup_{f \in C^\alpha_{\beta,\infty}} ||f(x) - V^{(r)}_{n,p}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4q^{(n-\Sigma_p+r-1)}}{\pi\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\int\limits_0^\pi \Gamma^{\frac{r+1}{2}}(x)dx + O(1)\left(\frac{q^{(n-\Sigma_p+r)}}{(n-\Sigma_p+r-1)(1-q)^{r+2}\prod\limits_{i=1}^{r} p_i} + \frac{\sum\limits_{\alpha\subset\overline{r-1}} q^{\left(n-1-\sum\limits_{j\in\alpha} p_j + r\right)}}{(1-q)^{r+1}\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\right),$$

где $\Gamma(x) = (1 - 2q\cos x + q^2)^{-1}$, $\overline{r-1} = \{1; 2; ...; r-1\}$.

1. А. И. Степанец *Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций,* Мат. сб., **192** (2001), 113–138

Славянский государственный педагогический
Университет
e-mail: sgpi@slav.dn.ua

Найкраще наближення деяких класів періодичних функцій тригонометричними поліномами

Є.Ю. Овсій

Нехай C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Нехай $C^\psi_\beta H_\omega$ — множина функцій $f \in C$, які в кожній точці $x \in R$ можуть бути представлені у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\Psi_\beta(t)\,dt, \quad a_0 \in R, \quad \varphi \in H^0_\omega,$$

де $H^0_\omega = \{\varphi \in C : \ |\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t' - t''|) \ \forall\, t', t'' \in R, \ \varphi \perp 1\}$, $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, $\Psi_\beta(t)$ — сумовна функція, ряд Фур'є якої має вигляд $\sum_{k=1}^\infty \psi(k)\cos(kt + \beta\pi/2)$, $\beta \in R$ і $\psi(k)$ — задана функція натурального аргументу. Нехай $\mathfrak{M}'_0$ — множина всіх неперервних та опуклих донизу при $t \ge 1$ функцій $\psi(t)$, що задовольняють умову:

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0, \ \ 0 < \frac{t}{\psi^{-1}(\frac{\psi(t)}{2}) - t} \le K, \ \ t \ge 1, \ \ \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Природними представниками множини $\mathfrak{M}'_0$ є, наприклад, функції вигляду t^{-r}, $r > 0$, $\ln^{-\alpha}(t+1)$, $\alpha > 1$ та ін.

Позначимо через $E_n(C^\psi_\beta H_\omega)$ найкраще наближення класу $C^\psi_\beta H_\omega$ тригонометричними поліномами $t_{n-1}(\cdot)$, порядок яких не перевищує $n-1$, тобто

$$E_n(C^\psi_\beta H_\omega) = \sup_{f \in C^\psi_\beta H_\omega} \inf_{t_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C.$$

Теорема. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta \in R$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$ має місце асимптотична формула

$$E_n(C^\psi_\beta H_\omega) = \frac{\theta_n(\omega)}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\int_0^{1/n} \psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\,dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n),$$

де $\theta_n(\omega) \in [2/3, 1]$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n і β. Якщо $\omega(t)$ опуклий модуль неперервності, то $\theta_n(\omega) = 1$.

Інститут математики
НАН України, Київ
e-mail: ovsiy.imath@gmail.com

Обобщения задачи об аналитическом продолжении с окружностей

О. А. Очаковская

Пусть P - отличный от константы многочлен от $n \geqslant 2$ переменных с комплексными коэффициентами и $P(D)$ - соответствующий дифференциальный оператор. Пусть S - некоторая сфера в R^n и B_S - открытый шар, с границей S. Будем говорить, что функция $f \in C(S)$ допускает P - продолжение в B_S, если существует $F \in C(\overline{B_S})$, такая, что $F\,|_S = f$ и $P(D)F = 0$ в B_S в смысле распределений.

Проблема 1. Пусть $G \subset R^n$ - непустое открытое множество и Σ - некоторая совокупность сфер $S \subset G$, таких, что $B_S \subset G$. Пусть $f \in C(G)$ и для любой сферы $S \in \Sigma$ функция $f\,|_S$ допускает P - продолжение в шар B_S. При каких условиях на G, Σ, P можно утверждать, что $P(D)f = 0$ в G в смысле распределений? Если $n = 2$ и $P(D) = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}$, то условие P- продолжения означает возможность аналитического продолжения с соответствующих окружностей. Этот случай и различные его обобщения ранее изучались многими авторами (см., например, [1] и библиографию к этой работе).

Теорема 1. Пусть P - однородный гармонический многочлен и Σ - множество всех сфер $S \subset G$, таких, что $B_S \subset G$. Тогда проблема 1 имеет положительное решение.

Для некоторых G теорема 1 допускает уточнения, связанные с уменьшением множества рассматриваемых сфер.

Литература

1. Volchkov V.V., *Integral Geometry and Convolution Equations,* Dordrecht / Boston / London. Kluwer Academic Publishers. 2003. 454p.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
г. Донецк
e-mail: ochakovskaya@telenet.dn.ua

About solving semi-discrete inverse problems in Sobolev scales by Tikhonov method

S. V. Pereverzev*, S. G. Solodky**, E. A. Volynets**

We consider an equation of the first kind $Af = g$, where $Af(x) := \int\limits_{\Omega} k(x,t)f(t)dt$ is a compact operator acting along the scale of Sobolev spaces $\{H^\tau\}$ with a step $\alpha > 0$. Previous studies of the problem were mainly restricted to the case when one looks for a regularized solution in the whole space $L_2(\Omega)$. The first result for Hilbert scales in combination with the discretization by collocation has been obtained recently in [1] but only for a-priori selection of regularization parameters. The present investigation is devoted to an a-posteriori regularization parameter choice for Tikhonov method in Hilbert-Sobolev scales applied to the equation discretized by collocation.

Suppose that we are given a set of pairwise distinct points $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega \subset \mathbf{R^d}$. Then, within a collocation scheme based on X the original equation is replaced by a semi-discrete equation $A_X f = \bar{g}$, where $\bar{g} = \{g_1, \ldots, g_n\}^T$, $g_j = g(x_j)$, and A_X is an operator with range in $\mathbf{R}^n$ defined as follows $(A_X f)_j = Af(x_j), \quad 1 \leq j \leq n.$

Assume we have only noisy data vectors $\bar{g}^\delta = \{g_1^\delta, \dots, g_n^\delta\}^T$ such that $|g_j - g_j^\delta| \le \delta,\ \ j = \overline{1,n}$. Let f^* be an exact solution of the original equation. Then it also solves semi-discrete equation and can be represented in the form $f^* = f^+ + v_0$, where $f^+ = A_X^+ \bar{g},\ \ A_X^+$ is the Moore-Penrose generalized inverse of A_X, and v_0 belongs to the null space of A_X.

Since only the element f^+ can be reconstructed from the semi-discrete equation then we are interested in recovery of unknown solution $f^+ = \varphi(A_X^* A_X)v$, where $v \in H^\tau$, $\|v\| \le \rho$ and φ is an index function such that $\varphi(t)/t$ is nonincreasing. For this purpose we use combination of the Tikhonov method and an a-posteriory rule. As such rule we use the balancing principle (see, for example, [2]). Main point of this principle is to choose the regularization parameter γ in such a way that it balances two functions determing final approximation error.

Let f_γ^δ be an approximation of the f^+ obtained by the Tikhonov method for some regularization parameter γ with the noisy data.

Theorem. Let $\gamma = \gamma'$ be the regularization parameter obtained by the balancing principle. Then the approximation error $\|f^+ - f_{\gamma'}^\delta\|_{L_2}$ achieves optimal order of accuracy on the considered set of the solutions.

References

1. J. Krebs, A. Louis, H. Wendland, *Sobolev error estimates and a priori parameter selection for semi-discrete Tikhonov regularization,* Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **17**, (2009), 845-869.

2. S. Pereverzev, E. Schock, *On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems,* SIAM J. Num. Anal., **43 (5)**, (2005), 2060–2076.

*Johann Radon Institute for
Computational and Applied Mathematics,
e-mail:sergei.pereverzyev@oeaw.ac.at

**Institute of Mathematics
of NAS of Ukraine,
e-mail: solodky@imath.kiev.ua

Інтегральні середні функцій, спряжених до субгармонійних функцій

Любомир Політило, Ярослав Васильків

Нехай $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$, $0 < R \le +\infty$. Нехай також $u(z)$ – субгармонійна в $\overline{\mathbb{D}}_R$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$; $\breve{u}(z)$ – спряжена функція до $u(z)$ (див. [1]); $\mathcal{F}(z) = u(z) + i\breve{u}(z),\ \ z \in \mathbb{D}_R$. Покладемо

$$T(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta, \qquad m_q(r,\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(re^{i\theta})|^q\,d\theta\right)^{1/q}, \qquad q \ge 1;$$

Теорема.*Нехай* $0 < r < +\infty$, $0 < \varepsilon(r) \le 1$, $\varepsilon(r)$ *– незростаюча на* $(0,+\infty)$ *функція,* $\varepsilon(0) = 1$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$*;* u *– субгармонійна в* $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ *функція,* $u(0) = 0$. *Тоді*

$$m_q(r,\mathcal{F}) \le A(q)\,\frac{T(\gamma^2(r)r,u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \qquad 1 \le q \le 2;$$

$$m_q(r,\mathcal{F}) \le A(q)\,\frac{\varepsilon(r)\,T(\gamma^2(r)r,u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \qquad 2 \le q < +\infty;$$

де $A(q) = 17 \cdot 2^{1-1/q}$ *при* $1 \le q \le 2$ *і* $A(q) = 17\, q^{1-1/q}$ *при* $2 \le q < +\infty$.

Наслідок. *Нехай* $\varphi(r)$ *– неперервна, додатна функція, задана на* $[r_0, +\infty)$*, неспадна,* $\varphi(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$*, причому* $\int_{r_0}^{+\infty} d\,r/\varphi(r) < +\infty$*. Нехай також виконуються умови теореми. Тоді, для всіх* $r \ge r_0^*$*, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри при* $r \to +\infty$

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right),\ 0 \le \alpha < 1 - 1/q,\ 1 \le q \le 2,$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right),\ 0 \le \alpha < 1/q,\ 2 \le q + \infty.$$

Література

1. A. A. Kondratyuk, Ya. V. Vasyl'kiv, *Conjugate of subharmonic function,* Matematychni Studii, – **V.13: 2** (2000), 173–180.

Львівський національний університет
імені Івана Франка
e-mail: ljupol7@gmail.com

Львівський національний університет
імені Івана Франка
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com

О константах наилучшего несимметричного приближения

О.В.Поляков

Пусть $C_{[0;1]}$, $L_p = L_p[0;1]$ $(1 \le p \le \infty)$ -пространство всех соответственно непрерывных, суммируемых в p-й степени $(1 \le p < \infty)$ на $[0,1]$ вещественнозначных функций f с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_p$.

Для $f \in L_p$ и чисел $\alpha > 0, \beta > 0$ обозначим через $C_{p;\alpha,\beta}$ константу наилучшего (α,β)- приближения функции $f \in L_p$, т.е.

$$\|f - C_{p;\alpha,\beta}\|_{p;\alpha,\beta} = \inf\{\|f-c\|_{p;\alpha,\beta} : c \in I\!R\} =$$
$$= \inf\{\|\alpha(f-c)_+ + \beta(f-c)_-\|_p : c \in I\!R\},$$

где $g_\pm(x) = \max\{\pm g(x), 0\}$.

Более детально с вопросами (α,β)-приближения можно познакомиться, например, в работе В.Ф.Бабенко [1]

Введем величину

$$A_{\alpha,\beta}(f) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(0) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(1).$$

Имеет место

Теорема. Пусть функция $f \in C_{[0;1]}$ монотонна на $[0;1]$ и не является линейной. Тогда:

1) если $f(x)$ выпукла вверх, то

$$A_{\alpha,\beta}(f) < C_{p;\alpha,\beta}(f) < C_{1;\alpha,\beta}(f),$$

2) если $f(x)$ выпукла вниз, то

$$C_{1;\alpha,\beta}(f) < C_{p;\alpha,\beta}(f) < A_{\beta,\alpha}(f).$$

При $\alpha = \beta = 1$ эта теорема была получена О.В.Черницкой в [2].

Литература

1. Бабенко В.Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций// Украинский математический журнал - 1982.- 34, N4. - С. 409-416.

2. Черницкая О.В. Поведение констант наилучшего приближения для выпуклых функций //Вiсн. Днiпропетр. ун-ту. Математика. - 2006. - С.110 - 114.

О применении несимметричных операторов обобщенного сдвига при приближении алгебраическими многочленами дифференцируемых функций.

М.К.Потапов

Пусть $L_{p,\alpha,\beta}$ – множество функций f, таких, что $\|f\|_{p,\alpha,\beta} < \infty$, где $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mid f(x)(1-x)^{\beta}(1+x)^{\alpha} \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ при $1 \le p < \infty$, $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \max\limits_{-1\le x\le 1} \mid f(x)(1-x)^{\beta}(1+x)^{\alpha} \mid$ при $p=\infty$.

Пусть $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов $P_{n-1}(x)$ степени не выше, чем $n-1$, в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$.

Для каждой данной пары целых неотрицательных чисел s и r введем оператор обобщенного сдвига $T_y\left(f,x\right) = \frac{2^{s+r}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} f(R)\psi(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$,

где $\psi(x,y,z) = \frac{\cos[s(\phi_1-\phi)+r(\phi_1-\mu)](1-R)^r(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+y)^{s+r}(1-x)^r(1-x^2)^{\frac{s}{2}}}$,

$R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, \quad \cos\phi_1 = z, \quad \sin\phi_1 = \sqrt{1-z^2}$,

$\cos\phi = \frac{-x\sqrt{1-y^2}+yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-R^2}}$,

$\cos\mu = \frac{z(1-xy)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R}, \quad \sin\mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R}$.

Пусть $\Delta_t^1(f) = T_{\cos t}(f,x) - f(x)$, $\Delta_{t_1,\ldots,t_k}^k(f) = \Delta_{t_k}^1\left(\Delta_{t_1,\ldots,t_{k-1}}^{k-1}(f)\right)$, $k \ge 2$,

$\widetilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup\limits_{\substack{|t_i|<\delta\\ i=1,\ldots,k}} \|\Delta_{t_1,\ldots,t_k}^k(f)\|_{p,\alpha,\beta}$, $D_u = (1-u^2)\frac{d^2}{du^2} - 2(r+(r+s+1)u)\frac{d}{du}$,

$D_u^1(f,u) = D_u(f,u), \quad D_u^r(f,u) = D_u^1(D_u^{r-1}f,u)$, $r \ge 2$.

Теорема. Пусть даны числа k,p,s,r,α и β такие, что $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}\cup 0$, $r \in \mathbb{N}\cup 0$, $p \in [1;+\infty]$, $-\frac{1}{2}+\frac{s}{2} < \beta \le \frac{s}{2}$ при $p=1$, $-\frac{1}{2p}+\frac{s}{2} < \beta < \frac{s}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$ при $p \in (1;+\infty)$, $\frac{s}{2} \le \beta < \frac{s}{2}+\frac{1}{2}$ при $p=\infty$, $\alpha = \beta + s$.

а) Если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ и имеет в интервале $(-1;1)$ все производные до порядка 2ρ и $D_x^{\rho}(f,x) \in L_{p,\alpha,\beta}$, то $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{M_1}{n^{2\rho}}\widetilde{\omega}_k\left(D_x^{\rho}(f,x),\frac{1}{n}\right)_{p,\alpha,\beta}$, б) если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $\sum\limits_{d=1}^{\infty} d^{2\rho-1}E_d(f)_{p,\alpha,\beta} < \infty$, то f имеет в интервале $(-1;1)$ все производные до порядка 2ρ, $D_x^{\rho}(f,x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ и

$$\widetilde{\omega}_k\left(D_x^{\rho}(f,x),\frac{1}{n}\right)_{p,\alpha,\beta} \le M_2\left(\frac{1}{n^{2k}}\sum_{d=1}^{n} d^{2k+2\rho-1}E_d(f)_{p,\alpha,\beta} + \sum_{d=n+1}^{\infty} d^{2\rho-1}E_d(f)_{p,\alpha,\beta}\right),$$

где M_1 и M_2 не зависят от f и $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00302) и программы поддержки Ведущих научных школ (НШ-32-52-2010.1)

Россия, Москва
МГУ им.М.В.Ломоносова

Приближение функций из $H^p(D^n), 0 < p < \infty$ обобщенными средними Абеля-Пуассона

Прибегин С. Г. (Odessa)
ivanpribegin@rambler.ru

Пусть $D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C^n} : |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, n\}$ — единичный полидиск, функция $f(z) = f(z_1, \dots, z_n) \in H^p(D^n)$, $f(e^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n})$ — угловые граничные значения функции f, $Q^n = [-\pi; \pi]^n$, $d\varphi = d\varphi_1 \dots d\varphi_n, ||f(e^{i\varphi})||_p = (\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q^n} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi)^{\frac{1}{p}}$, $l > 0$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \binom{l}{m} = \frac{\Gamma(l+1)}{m!\Gamma(l-m+1)}$ — биномиальные коэффициенты, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R^n}$, $\Delta_h^l f(e^{i\varphi}) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m}(-1)^m f(e^{i(\varphi+h)})$ — дробная разность, которая определена почти всюду при

$$(l \in \mathbf{N}) \vee ((l \in (0, \infty) \backslash \mathbf{N}) \wedge (l > (\tfrac{1}{p} - 1)_+)), \qquad (1)$$

$\omega_l(f, \delta)_p = \sup\limits_{|h_j| \le \delta, j=\overline{1,n}} ||\Delta_h^l f(e^{i\varphi})||$ и $\tilde{\omega}_l(f, \delta)_p = \sup\limits_{|h| \le \delta} ||\Delta_{\tilde{h}}^l f(e^{i\varphi})||_p$

(здесь $\tilde{h} = (h, \dots, h)$, $h \in \mathbf{R}$) — модули гладкости дробного порядка. Далее, $k = (k_1, \dots, k_n)$, где k_j — неотрицательные целые числа,$|k| = k_1 + \dots + k_n, \hat{f}_k = \hat{f}_{k_1, \dots, k_n}$ — коэффициенты ряда Тейлора функции f, $(k, \varphi) = k_1\varphi_1 + \dots + k_n\varphi_n$, $\varepsilon > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\varphi_l(t) = 1 - (1 - e^{-t})^l$, $P_\varepsilon^l(f, e^{i\theta}) = \sum\limits_k \varphi_l(\varepsilon|k|)\hat{f}_k e^{ik\theta} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m}(-1)^{m+1} f(e^{-m\varepsilon} e^{i\theta})$ — обобщенные средние Абеля-Пуассона.

Теорема. Пусть $f \in H^p(D^n)$, $o < p < \infty$ l удовлетворяет условиям (1). Тогда

$$C_1(l, p)\tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \le ||f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f, e^{it})||_p \le C_2(l, p)\omega_l(\varepsilon, f)_p,$$

где $C_1(l, p)$ $C_2(l, p)$ — положительные константы, зависящие от указанных параметров.

Остаточный член в формуле Тейлора для голоморфной в области функции

Радзиевская Е.И.

Пусть f — голоморфная в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция. Считаем, что точки z_0 и z_1 принадлежат области D.

Россмотрим вопрос, когда в формуле Тейлора

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z_1 - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + Q_n(z_0; z_1; f), \qquad (1)$$

(здесь $n \in \mathbb{N}$) остаточный член $Q_n(z_0; z_1; f)$ представим в форме Лагранжа

$$Q_n(z_0; z_1; f) = \frac{(z_1 - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \qquad (2)$$

и где расположено ξ?

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть f — голоморфная в области D функция, компакт K целиком лежит в D, $n \in \mathbb{N}$ и $f^{(n+1)}(z) \ne 0$ при $z \in K$. Тогда для любого положительного $\delta \le n/(n+1)$ найдется такое положительное $r := r(f, n, K, \delta)$, что все круги $U(z_0; r)$ при $z_0 \in K$ лежат в D и, коль скоро, $z_0 \in K$, $|z_1 - z_0| < r$ и $z_1 \ne z_0$, то в круге $U(z_0; |z_1 - z_0|)$ существует единственное ξ, для которого справедлива формула (2), причем это ξ локализовано в круге $U(z_0 + (z_1 - z_0)/(n+1); \delta|z_1 - z_0|)$.*

Отметим, что теоремам о среднем для голоморфных функций посвящено достаточно много работ различных авторов. В этих теоремах точка z_0 фиксируется и ей соответствует фиксированный круг $U(z_0; r)$, для точек z_1 из которого справедлива формула (2) при $n = 1$. В данной теореме n — любое натуральное число, и указывается условие существования одного r, для которого выполняется формула (2), если только $|z_1 - z_0| < r$ и z_0 пробегает некоторый компакт, принадлежащий области D.

По-видимому эта теорема — первое утверждение, дающее „глобальную“ формулировку теоремы о среднем (т.е. в случае $n = 1$).

1. Радзиевская Е.И., Радзиевский Г.В. *Для голоморфной в области функции остаточный член в формуле Тейлора допускает запись в форме Лагранжа*, Сиб. мат. журн., Т. 44, № 2 , (2003), 402 - 414.

Национальный университет пищевых технологий,
Київ
e-mail: radzl58@mail.ru

О норме интерполяционных рациональных функций

Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий

В данной работе рассматриваются вопросы вычисления нормы различных интерполяционных рациональных функций в пространстве квадратично суммируемых функций.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим интерполяционную функцию Лагранжа с узлами в нулях x_k, $k = 1, \ldots, n$, косинус-дроби Чебышева-Маркова $M_n(x)$, построенную для функции $f \in C[-1; 1]$:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{(-1)^n M_n(x) \sqrt{1 - x_k^2}}{\lambda_n(x_k)(x - x_k)}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1 - a_k^2}}{1 + a_k x}.$$

Теорема. Для любой функции $f \in C[-1; 1]$ справедливо соотношение

$$\int_{-1}^{1} \frac{|L_{n-1}(x; f)|^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(x_k)}{\lambda_n(x_k)}.$$

Обозначим через $L_2(\rho) = L_2(\rho; [-1; 1])$ пространство квадратично суммируемых по Лебегу с весом $\rho = \rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_2(\rho)} = \left(\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \right)^{1/2}.$$

На основании полученого результата можно вычислить норму оператора $L_{n-1} : C[-1; 1] \to L_2(\rho; [-1; 1])$:

$$\|L_{n-1}\|_{C \to L_2(\rho)} = \sqrt{\pi}$$

и, как следствие, оценить погрешность приближения функции $f \in C[-1; 1]$ в пространстве $L_2(\rho)$.

В заключении отметим, что нами также получены аналогичные результаты в случае интерполирования на всей числовой прямой, а также в периодическом случае (см., например, [1]).

1. Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий, *Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева-Маркова,* Докл. НАН Беларуси, **5** (2008), 11–15. (Russian)

Гродненский государственный университет
Гродно, Беларусь
e-mail: rovba@grsu.by

Гродненский государственный университет
Гродно, Беларусь
e-mail: k.smotritski@grsu.by

Наилучшие приближения классов периодических функций многих переменных

А. С. Романюк

На классах периодических функций многих переменных $B^r_{p,\theta}$ [1] исследуются наилучшие приближения тригонометрическими полиномами с "номерами" гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. Погрешность приближений измеряется в интегральной и равномерной метриках.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$ — множество функций, у которых

$$\|f\|_p = \Big((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Ниже предполагается, что для $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}, \quad \text{п. в. .}$$

Кроме того, не уменьшая общности, будем считать, что координаты вектора $r = (r_1, \dots, r_d)$, присутствующего в определении класса $B^r_{p,\theta}$, упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \dots \leqslant r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ сопоставим векторы $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1, j = \overline{1,d}$ и $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma'_j = \gamma_j, j = \overline{1,\nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j, j = \overline{\nu+1,d}$. Таким образом $r' = (r'_1, \dots, r'_d)$ — вектор с координатами $r'_j = r_1 \gamma'_j, j = \overline{1,d}$.

Для векторов $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}$ и $k = (k_1, \dots, k_d), k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,d}$, положим $\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1,d}\}$ и обозначим

$$Q^r_n = \bigcup_{(s,\gamma) \leqslant n} \rho(s), \quad (s, \gamma) = s_1\gamma_1 + \ldots + s_d\gamma_d.$$

Множество Q^r_n называют ступенчатым гиперболическим крестом, а соответствующее множество $Q^{r'}_n = \bigcup\limits_{(s,\gamma') \leqslant n} \rho(s)$ — расширенным ступенчатым гиперболическим крестом.

Пусть

$$T(Q^r_n) = \big\{t : \ t(x) = \sum_{k \in Q^r_n} c_k e^{i(k,x)}\big\}$$

и

$$E_{Q^r_n}(f)_q = \inf_{t \in T(Q^r_n)} \|f - t\|_q, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty \quad -$$

наилучшее приближение функции $f \in L_q(\pi_d)$ полиномами из множества $T(Q_n^r)$.

Аналогично определяются множество $T(Q_n^{r'})$ и величина $E_{Q_n^{r'}}(f)_q$.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leqslant 2$, $r_1 > 0$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Тогда

$$E_{Q_n^{r'}}(B^r_{p,\theta})_1 = \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} E_{Q_n^{r'}}(f)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)_+},$$

где $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Теорема 2. Пусть $2 < p < \infty$, $r_1 > 0$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$. Тогда

$$E_{Q_n^r}(B^r_{p,\theta})_1 = \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} E_{Q_n^r}(f)_1 \asymp 2^{-nr_1}.$$

Литература

1. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения.* Тр. Мат. ин-та АН СССР. 187 (1989), 143–161.

Институт математики НАН Украины
e-mail: Romanyuk@imath.kiev.ua

Нелинейная аппроксимация классов функций многих переменных

В.С.Романюк

В докладе рассматриваются задачи о порядковых оценках приближения некоторого множества F в банаховом пространстве Лебега $L_q(I^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, $I^d := \prod_{i=1}^{d} [\,0;1\,]$ (снабженного стандартной нормой $\|\cdot\|_q$) при помощи n-членных агрегатов, построенных на базе разложений

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad x = (x_1, \cdots, x_d) \tag{1}$$

в $L_q(I^d)$ элементов $\varphi \in F$ по системе (базису) $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_q(I^d)$.

Первая часть доклада — оценки приближения n-членными "greedy" аппроксимантами по базису Хаара $\{H_I\}_I$ в $L_q(I^d)$, $1 < q < \infty$, классов типа Бесова (определение этих классов дается на основе разложения (1)) по упорядоченной системе $\{H_I\}_I$.

Вторая часть — точные по порядку оценки n-членных проективных (аффинных) приближений по системе Фабера-Шаудера (которая является базисом в пространстве $C(I^d)$) функций из единичных шаров изотропных пространств Бесова.

Дадим определение рассматриваемой величины и сформулируем результат.

Пусть $F \subset C(I^d)$, $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис Фабера-Шаудера $\Phi = \{\phi_{\overline{\tau}}\}$, упорядоченный, исходя из нумерации базисных функций посредством "двоичного" разбиения куба I^d, т.е. для $\varphi \in F$ имеет место представление (1) в $C(I^d)$ с явным определением коэффициентов a_k (см.[1]).

Определение. n-членным проективным приближением множества F по системе Φ назовем величину

$$e_n^{pr}(F;\Phi;L_q) = \sup_{\varphi \in F} \inf_{\Lambda:\#\Lambda=n} \|\varphi - \sum_{k \in \Lambda} a_k \varphi_k\|_q.$$

Пусть далее

$$B^{\alpha}_{p,\theta} := \{\varphi \in L_p(I^d) : \|\,\varphi\,\|^{\alpha}_{p,\theta} := \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega(\varphi;t)_p}{t^{\alpha}} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty,\ 0 < \alpha < 1,\ 1 \leq p, \theta \leq \infty\},$$

где $\omega(\varphi;t)_p -$ p — модуль непрерывности функции $\varphi \in L_p(I^d)$. Обозначим через $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ — единичный шар в пространстве $B^{\alpha}_{p,\theta}$.

Теорема. Пусть $d \in N$, $1 < p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. Тогда

$$e^{pr}_n(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \asymp n^{-\alpha/d}.$$

[1] J.Ryll. Schauder bases for the space of continuous functions on n-dimensional cube. // Comment.Math.Prace Mat., 27(1973), 201-203.

Институт математики
НАН Украины
e-mail: romanyuk@imath.kiev.ua

Оценка дисперсии, вычисленная по интервальным данным

В.И.Рубан

Обозначим через $(x_1, x_2, ..., x_n) = x \in R^n$ реализацию выборки из произвольного распределения F, через $(y_1, y_2, ..., y_n) = y \in R^n$ и $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) = \epsilon \in R^n$ – вектора полученных (приближенных) значений и погрешностей. Далее, через Θ обозначим неизвестный числовой параметр распределения F, Θ_x, Θ_y – оценки параметра F, использующие одну и ту же статистику, вычисленные для векторов x и y соответственно. Кроме того, пусть

$$\max_i |\epsilon_i| \le \Delta$$

. Исследователю доступно значение Θ_y, поэтому возникает задача построения на основе этой информации интервала, который накрывает неизвестное значение Θ_y.

Мы рассматриваем эту задачу для случая, когда оценивается дисперсия с помощью стандартной оценки s^2. В [1] найдено асимптотическое (с точностью до $O(\Delta^2)$) значение границ интервала, накрывающего s^2_x, наименьшего среди всех интервалов, симметричных относительно s^2_x. Нами найдены верхняя и нижняя границы наименьшего среди всех (без условия симметричности.) накрывающего интервала. Нижняя граница найдена с точностью $O(\Delta^2)$, для верхней границы найдено точное значение.

References

1. Орлов. А.И., *Нечисловые статистики.*//МЗ-Пресс,-2004.-513 с

Dnepropetrovsk National University
e-mail: v_ruban@ukr.net

Рациональная аппроксимация свертки обобщенного ядра Вейля и аналитической функции из $H_p(D)$

В. Н. Русак

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность точек из круга D, причем $|\alpha_k| < 1$, если $1 \leqslant k \leqslant n$, и $|\alpha_k| = 0$, если $k = 0$ или $k \geqslant n+1$. Система рациональных функций

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \ \varphi_m(z) = \sqrt{\frac{1-|\alpha_m|^2}{2\pi}}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}z}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}, \ m \in N, \tag{1}$$

является ортонормированной на окружности $T = \{z : |z| = 1\}$ в том смысле, что $\int\limits_T \varphi_j(\xi)\overline{\varphi_m(\xi)}\,|d\xi| = \delta_{jm}$.

Введем обобщенное ядро Вейля, полагая, что $r > 0$ и

$$K_r\left(z, \xi\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)}\Big/ k^r.$$

Через $H_p(D)$, $p \geqslant 1$ обозначим пространство Харди аналитических в D функций, подчиненных условиям $h(0) = 0$, $\sup\limits_{0<p<1}\int\limits_0^{2\pi}\left|h\left(pe^{it}\right)\right|^p dt < \infty$. В таком случае почти всюду на $|\xi| = 1$ существуют предельные значения $h(\xi) \in L_p[T]$.

Будем рассматривать аналитические в D функции, представимые в форме

$$f(z) = a_0 + \int\limits_{|\xi|=1} h(\xi)K_r(z,\xi)\,|d\xi|, \ h(\xi) \in H_p(D). \tag{2}$$

Определим также равномерное наилучшее рациональное приближение

$$R_n(f) = R_n(f; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \inf_{\{a_m\}} \sup_{|z|\leqslant 1}\left| f(z) - \sum_{m=0}^{n} a_m\varphi_m(z)\right|.$$

Теорема 1. Если $h(\xi) \in H_p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, то для функций вида (2) при $r > 1/p$ выполняется неравенство

$$R_n(f) \leqslant C\left(\tfrac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Заметим в заключение, что порядковая оценка (3) для наилучших рациональных приближений достигается на уклонениях частных сумм ряда Фурье функции $f(z)$ по ортогональной системе (1). В полиномиальной теории приближений для ряда классических сверток были найдены оценки наилучших приближений с точными константами (см. [1]).

Литература

1. Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближений,* М. 1976. 320с.

Белорусский государственный
университет
e-mail: rusak@bsu.by

Робастное оценивание параметров сплайновой регрессии

Савкина Марта

Рассмотрим модель линейной сплайновой регрессии

$$y = X\alpha + \epsilon,$$

где $y = (y_1, ..., y_n)^T$ - вектор зависимой переменной, представляющий собой n наблюдений значений y, X $-$ матрица независимых переменных (матрица плана), элементы которой суть $n * m$

наблюдений независимых переменных $x_1, ..., x_m$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)^T-$подлежащий оцениванию вектор неизвестных пара-метров, $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)^T-$ вектор случайных отклонений с нулевым математическим ожиданием $M\epsilon_i = 0$ и одинаковой дисперсией $D\epsilon_i = \sigma^2,\ i = 1, ..., n.$

В условиях нормального распределения отклонений оценка неизвестных параметров, полученная с помощью метода наименьших квадратов(МНК), который заключается в минимизации суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

относительно вектора α, является эффективной[1].

Однако в реальной ситуации предполагаемая модель редко является абсолютно точно специфицирован-ной; в частности, наблюдения могут быть засорены. Оценки, ориентированные на распределения с легкими хвостами (в частности, оценка МНК), в таком случае оказываются далекими от эффективных. В распреде-лениях с тяжелыми хвостами более эффективными будут менее чувствительные оценки, а именно такие, которые не меняют резко своих значений при возникновении больших отклонений(выбросов). Такие оценки называются робастными. Одной из них является L_1-оценка, получаемая с помощью метода наименьших абсолютных отклонений, который заключается в минимизации суммы

$$\sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i|, \tag{1}$$

относительно вектора α.

L_1-оценка параметров регрессии существует и единственна. При некоторых условиях на распределение вектора ϵ доказана ее несмещенность [2]. В работе [3] предложен простой итеративный метод минимиза-ции (1).

Мы предлагаем алгоритм получения за конечное число шагов L_1-оценки параметров сплайновой регрессии, матрица плана которой имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 & 0 \\ . & . & . \\ \frac{k}{n} & 1 & 0 \\ \frac{k+1}{n} & 1 & \frac{1}{n} \\ . & . & . \\ 1 & 1 & \frac{n-k}{n} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, ..., n-1,$$

а также метод приближенного вычисления матрицы ковариаций этой оценки неизвестных параметров.

1. Е. З. Демиденко, *Линейная и нелинейная регрессии,* Москва,Финансы и статистика, 1981.

2. Hogan W.W.,*Norm minimisation and unbiasedeness.*-Econometrica,1976, v.44, №3.

3. Епишин Ю.Г.,*Об оценках параметров регрессии по методу наименьших абсолютных отклонений.*-Экономика и математические методы,1974, т.44, вып 5.

Институт математики
НАН Украины
e-mail: marta@imath.kiev.ua

Оцінки сум Фейєра для функцій класу Блоха

Віктор Савчук і Марина Савчук

Нехай функція f є голоморфною в крузі $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$, – її розвинення в ряд Тейлора і $\sigma_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k/n) \widehat{f}_k z^k$ – сума Фейєра порядку $n-1, n \in \mathbb{N}$, функції f.

Позначимо

$$M_p(r, f) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \ p > 0, \quad M_\infty(r, f) := \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})|,$$

$$\|f\|_p := \sup_{r \in [0,1)} M_p(r, t), \quad \|f\|_{\mathcal{B}_p} := \sup_{r \in [0,1)} (1 - r^2) M_p(r, f'),$$

і

$$\mathcal{B}_p := \left\{ f \text{ голоморфна в } \mathbb{D} : f(0) = 0, \|f\|_{\mathcal{B}_p} \le 1 \right\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

Множина $\mathcal{B}_\infty$ називається класом Блоха, а $\mathcal{B}_p, p > 0$, – p-класом Блоха.

Відомо, що $\mathcal{B}_p \supset UH_p$, $1 < p \le \infty$, де UH_p – одинична куля простору Гарді H_p і $\mathcal{B}_1 \supset K$, де K – множина інтегралів типу Коші–Стільтьєса комплекснозначних зарядів на колі $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$, варіації яких не перевищують 1.

Суми Фейєра відіграють важливу роль в описанні класу $\mathcal{B}_\infty$. А саме, в [1] показано, що

$$\|\sigma_n'(f)\|_\infty = O(n), \ n \to \infty \Longleftrightarrow \|f\|_{\mathcal{B}} < \infty,$$

В [2] доведено, що

$$\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty \Longrightarrow \|\sigma_n(f)\|_\infty = O(\ln n), \ n \to \infty \tag{1}$$

і показано, що обернена імплікація не справджується.

Ми показуємо, що оцінка в (1) є точною і конкретизуємо константу, яка входить в символ O.

Теорема. Нехай $p = 1, \infty$. Тоді для кожного натурального $n \ge 2$ справджуються співвідношення

$$C_p \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \sup \{ \|\sigma_n(f)\|_p : f \in \mathcal{B}_p \} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

де $C_1 = 1/\pi$ і $C_\infty = 1/2$.

Література

1. G. Bennett, D. A. Stegenga, R. Timoney, *Coefficients of Bloch and Lipschitz functions* // Illinois J. Math., **25** (1981), 520 – 531.

2. F. Holland, D. Walsh, *Criteria for Membership of Bloch Space and its Subspace, BMOA* // Math. Ann., **273** (1986), 317 – 335.

Інститут математики
НАН України
e-mail: savchuk@imath.kiev.ua

Інститут підготовки кадрів
державної служби зайнятості
України
e-mail: savchuk_m@ukr.net

Приближение голоморфных функций суммами Валле Пуссена

В.В. Савчук и С.О. Чайченко

Пусть функция f голоморфна в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}$ и $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$, — ее разложение в ряд Тейлора.

Пусть, далее, $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\psi_0 = 1)$ — последовательность комплексных чисел. Будем обозначать через H_{∞}^{ψ} класс функций f, голоморфных в $\mathbb{D}$ и представимых в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{g}_k z^k, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widehat{g}_k z^k$ — голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, для которой $\|g\|_{\infty} := \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} |g(z)| \leq 1$.

Мы имеем целью получить асимптотическое равенство для величины

$$R_{n,p}(H_{\infty}^{\psi}) := \sup_{f \in H_{\infty}^{\psi}} \|f - V_{n,p}(f)\|_{\infty},$$

в которой

$$V_{n,p}(f)(z) := \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{k} \widehat{f}_l z^l \right), \quad n, p \in \mathbb{N}, \ p \leq n,$$

— суммы Валле Пуссена функции f.

Будем считать, что натуральное число p зависит от n так, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} (p/n)$ существует и равен Θ.

Предположим, что действительная и мнимая части последовательности ψ положительны, выпуклы и удовлетворяют условиям

$$\frac{\operatorname{Re} \psi_k}{\operatorname{Re} \psi_{2k}} \leq K_1 < \infty, \quad \frac{\operatorname{Im} \psi_k}{\operatorname{Im} \psi_{2k}} \leq K_2 < \infty \quad \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

В сделанных предположениях имеет место такое утверждение.

Теорема. *Пусть $n, p = p(n) \in \mathbb{N}$, $p < n$ и $0 \leq \Theta < 1$. Тогда при $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$R_{n,p}(H_{\infty}^{\psi}) = \frac{1}{\pi} |\psi_n| \ln \frac{n}{p} + O(1) |\psi_n|, \tag{1}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно p и n.

Соотношение (1) является асимптотическим равенством в тех случаях, когда $\Theta = 0$.

Институт математики
НАН Украины
e-mail: savchuk@imath.kiev.ua

Славянский государственный
педагогический университет
e-mail: stolch@mail.ru

Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах інтегралів Пуассона сумовних функцій

А. С. Сердюк*, А. П. Мусієнко**

Інтегралом Пуассона функції $\varphi \in L_1$ називають функцію $f(x)$, яка задається у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $P_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$ — ядро Пуассона з параметрами $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Функцію φ в рівності (1) називають (q,β)-похідною функції f і позначають через f^q_β. Множину функцій, які можна представити у вигляді (1) коли $\varphi \in L_s$, $1 \le s \le \infty$, позначають через $L^q_\beta L_s$.

Нехай $f \in L_1$. Поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

де $S_k(f) = S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k функції f, називають сумами Валле Пуссена функції f з параметрами n і p.

Позначимо через $E_m(\varphi)_{L_s}$ — величину найкращого наближення функції $\varphi \in L_s$ тригонометричними поліномами $t_{m-1}(\cdot)$ порядок яких не перевищує $m-1$ в метриці простору L_s, тобто величину вигляду

$$E_m(\varphi)_{L_s} = \inf_{t_{m-1}} \|\varphi(\cdot) - t_{m-1}(\cdot)\|_{L_s}.$$

Одержано оцінки відхилень сум $V_{n,p}(f)$ на множинах інтегралів Пуассона функцій з простору L_s, $1 \le s \le \infty$, що виражаються через найкращі наближення таких функцій тригонометричними поліномами в метриці L_s і показано асимптотичну непокращуваність отриманих оцінок.

Теорема. Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n,p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ і $1 \le s \le \infty$. Тоді для довільної функції $f \in L^q_\beta L_s$ справедлива нерівність

$$\|f - V_{n,p}(f)\|_C \le \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}, \tag{2}$$

в якій $s' = \frac{s}{s-1}$, $K_{q,p}(s') = 2^{-1/s'}\left\|\dfrac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}\right\|_{s'}$, $\sigma(s',p) =$
$$\begin{cases} 1 & \text{при} \quad s' = 1 \quad \text{і} \quad p = 1, \\ 2 & \text{при} \quad 1 < s' \le \infty \quad \text{і} \quad p = 1, \\ 3 & \text{при} \quad 1 \le s' \le \infty \quad \text{і} \quad p \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \end{cases}$$
і $\delta(s) = \begin{cases} 0, & s = 2, \\ 1, & s \in [1,\infty] \setminus \{2\}. \end{cases}$

При цьому для будь-якої функції $f \in L^q_\beta L_s, 1 \le s \le \infty$ і довільних $n,p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ в просторі $L^q_\beta L_s, 1 \le s \le \infty$ знайдеться функція $F(x) = F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}(F^q_\beta)_{L_s} = E_{n-p+1}(f^q_\beta)_{L_s}$ і для неї при $n-p \to \infty$ виконується рівність:

$$\|F - V_{n,p}(F)\|_C = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(F^q_\beta)_{L_s}. \tag{3}$$

У (2) і (3) $O(1)$ — величини рівномірно обмежені по параметрах n,p,q,β,s і $f \in L^q_\beta L_s$.

При $p=1$ і $s=\infty$ наведена теорема встановлена в роботі [1].

Література

1. Степанец А.И., Сердюк А.С. *Неравенства Лебега для интегралов Пуассона*, Укр.мат.журн., **52 (6)**, (2000), 798–808.

*Інститут математики
НАН України
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

**Інститут математики
НАН України
e-mail: andreymap@rambler.ru

Асимптотичні оцінки найкращих інтегральних наближень класів інтегралів Пуассона функцій з H_{ω_L}

А.С. Сердюк, І.В. Соколенко*

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на $(-\pi,\pi)$ функцій з нормою $\|\varphi\|_L=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|\,dt$, $H_{\omega_L}:=\{\varphi\in L:\|\varphi(\cdot+t)-\varphi(\cdot)\|_L\le\omega(t),\ t\ge 0\}$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Нехай, далі, $L^q_\beta H_{\omega_L}$ — множина усіх 2π-періодичних сумовних функцій f, що майже скрізь зображуються у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P^q_\beta(t)dt,\quad \varphi\in H_{\omega_L},\tag{1}$$

де $P^q_\beta(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k\cos(kt-\frac{\beta\pi}{2}),\ q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R},$ — ядро Пуассона.

Кожній функції f із класу $L^q_\beta H_{\omega_L}$ поставимо у відповідність тригонометричний поліном $U_{n-1}(f;x)=U_{n-1}(q;\beta;f;x)$ вигляду

$$U_{n-1}(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\nu_k^{(n)}(a_k\sin kx-b_k\cos kx)\right\},$$

де $a_k=a_k(\varphi)$, $b_k=b_k(\varphi)$, $k=1,2,...,$ — коефіцієнти Фур'є функції φ, що пов'язана з f рівністю (1), а числа $\lambda_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}(q;\beta)$ і $\nu_k^{(n)}=\nu_k^{(n)}(q;\beta)$, $k=1,...,n-1$, означаються за допомогою рівностей

$$\lambda_k^{(n)}=(q^k-q^{2n-k})\cos\frac{\beta\pi}{2},\qquad \nu_k^{(n)}=(q^k-q^{2n-k})\sin\frac{\beta\pi}{2},\quad k=1,...,n-1.$$

Розглянемо величини

$$\mathcal{E}(L^q_\beta H_{\omega_L};U_n)_L=\sup_{f\in L^q_\beta H_{\omega_L}}\|f-U_n(f)\|_L\ \text{ і }\ E_n(L^q_\beta H_{\omega_L})_L=\sup_{f\in L^q_\beta H_{\omega_L}}\inf_{T_{n-1}}\|f-T_{n-1}\|_L,\ n\in\mathbb{N},$$

де inf розглядається по усіх можливих тригонометричних поліномах $T_{n-1}(x)$ порядку не більшого ніж $n-1$. Має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n\to\infty$*

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}(L^q_\beta H_{\omega_L};U_{n-1})_L\\ E_n(L^q_\beta H_{\omega_L})_L\end{array}\right\}=\frac{2\theta_\omega q^n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt+\frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2n},$$

де $\frac12\le\theta_\omega\le1$, причому $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно параметрів n,q і β.

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект GP/F27/0103).

Інститут математики
НАН України
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

Інститут математики
НАН України
e-mail: sokol@imath.kiev.ua

Наближення лінійних комбінацій різних зсувів за аргументом функцій малої гладкості, визначених на дійсній осі операторами Валле Пуссена

Євгеній Сілін

Нехай $\widehat{L}$ — простір функцій f, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$, які мають скінченну норму: $||f||_{\widehat{L}} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} |f(t)|\, dt$. $\widehat{C}$ — підмножина неперервних функцій з $\widehat{L}$. $\mathfrak{A}$ означає множину функцій ψ, таких, що: 1) $\psi(v)$ зростає та неперервна на $[0,1)$, $\psi(v)\geq 0$, $\psi(0)=0$; 2) $\psi(v)$ опукла на $[1,\infty)$ і $\lim_{v\to\infty}\psi(v)=0$; 3) $\psi'(v+0)$ має обмежену варіацію на $[0;\infty)$. $\mathfrak{A}' := \{\psi\in\mathfrak{A} : \int_1^\infty \psi(v)/v\, dv < \infty\}$. Для пари $\psi_1\in\mathfrak{A}$, $\psi_2\in\mathfrak{A}'$ покладемо $\overline{\psi} := \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} і ψ_{2-} — парне та непарне продовження ψ_1 і ψ_2 відповідно. Якщо функцію $f\in\widehat{C}$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(s) e^{-ist} ds dt : = A + \varphi * \widehat{\overline{\psi}},$$

де $A = \mathrm{const}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a}$, $\varphi\in S_\infty := \{\varphi : \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|\leq 1\}$, то ми кажемо: 1) функція $\varphi(\cdot)$ є <u>*$\overline{\psi}$-похідною*</u> функції $f(\cdot)$ і позначаємо $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$; 2) $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$. Для $f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$ також означимо $V_{\sigma,h}(f;x) = A + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x)$ — *оператор Валле Пуссена*, де $0 < h = h(\sigma) < \sigma < \infty$, $\lambda_{\sigma,h}(s) = 1$ якщо $0\leq|s|\leq\sigma-h$, $\frac{\sigma-|s|}{h}$ якщо $\sigma-h\leq|s|\leq\sigma$, 0 у випадку $\sigma\leq|s|$. Кожній функції $\psi\in\mathfrak{A}$ поставимо у відповідність функцію $\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$. Тоді $\mathfrak{A}_0 = \{\psi\in\mathfrak{A} : 0 < t/(\eta(t)-t) < \mathrm{const}\}$.

Предметом нашого дослідження є суми

$\Sigma_{\sigma,h,m} = \Sigma_{\sigma,h,m}(f;x;\alpha;\delta) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i[f(x+\delta_i) - V_{\sigma,h}(f;x+\delta_i)]$, де $\alpha_i(\sigma)$ та $\delta_i(\sigma)$ — величини, які рівномірно обмежені по σ.

Теорема. *Нехай $\psi_1\in\mathfrak{A}_0$, $\psi_2\in\mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{A}'_0 : =\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{A}'$, дійсні числа $\sigma > h \geq 1$ задовольняють умову $0\leq \lim\limits_{\sigma\to\infty}(h/\sigma) < 1$, стала $a\in(0,\pi\sigma/h)$. Величини α_i та δ_i рівномірно обмежені по σ і h. Тоді при $\sigma\to\infty$ виконується співвідношення*

$$\sup_{f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty} ||\Sigma_{\sigma,h,m}||_{\widehat{C}} = |\overline{\psi}(\sigma)|\left(\frac{4}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}\cos\left(\frac{a\delta_i}{\sigma}\right)dt\right|\right) + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|,$$

де $R_m = [(\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\cos(\sigma\delta_i+\gamma))^2 + (\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\sin(\sigma\delta_i+\gamma))^2]^{1/2}$, $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, O(1) — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h. Зазначимо, що, за певних умов, $R_m = 0$.

References

1. Дрозд В. В.,*Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем* // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — С. 46 – 58. — (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 89.17).

Слов'янський держ. пед. ун-т
Слов'янський держ. пед. ун-т, вул. Г.Батюка, 19,
Слов'янськ, 84116
e-mail: Silin-Evgen@meta.ua

Білінійні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних

К. В. Соліч

Розглядаються білінійні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою функцією $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$, що задовольняє умови Барі – Стєчкіна [1], які далі будуть позначатися (S) і (S_l).

Нехай $L_q(\mathbb{T}^{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, — множина функцій $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \| \, \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ по змінній $x \in \mathbb{T}^d$, а потім від результату — по змінній $y \in \mathbb{T}^d$ в просторі $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^{2d})$ визначимо найкраще білінійне наближення порядку m:

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \|f(x, y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_i \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f \in F} \tau_m(f)_{q_1,q_2}.$$

У доповіді буде йти мова про порядкові оцінки величини

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2} = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \tau_m(f)_{q_1,q_2},$$

при умові, що $f(x) \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, а білінійні наближення $\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ розглядаються для функцій $2d$-змінних виду $f(x - y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$.

Покладемо

$$\alpha(p, q_1) = \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1})_+, & \begin{matrix} 1 \le p \le q_1 \le 2 \quad \text{або} \\ 2 \le q_1 \le p \le \infty, \end{matrix} \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, & \begin{matrix} 2 \le p \le q_1 \le \infty \quad \text{або} \\ 1 \le p < 2 < q_1 \le \infty. \end{matrix} \end{cases}$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема. Нехай $1 \le p, q_1, q_2, \theta \le \infty$ і $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > \alpha(p, q_1)$, а також умову (S_l). Тоді для $m \in \mathbb{N}$ мають місце оцінки

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2} \asymp \begin{cases} \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}}, & 1 \le p \le q_1 \le 2, \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}), & \begin{matrix} 2 \le p \le q_1 \le \infty \quad \text{або} \\ 2 \le q_1 \le p \le \infty, \end{matrix} \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q_1 \le \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Зауваження. При $\Omega(t) = t^r$ і певних обмеженнях на $r > 0$ з (1) отримуються відповідні оцінки для величини $\tau_m(B^{r}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ [2].

Література

1. Бари Н. К., Стечкин С. Б., *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций,* Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.

2. Романюк А. С., *Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова,* Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **6(1)** (2009), 222–236.

Інститут математики
НАН України
e-mail: Sokava@mail.ru

Найкращі m-членні наближення класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ поліномами за системою Хаара

Сергій Стасюк

Нехай $L_q([0,1]^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, — простір Лебега 1-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі стандартною нормою $|| \cdot ||_{L_q}$ (у випадку $q = \infty$ вважаємо, що $L_\infty = C$ — простір неперервних функцій із звичайною рівномірною нормою).

Для заданої множини $\mathcal{D}$ елементів деякого банахового простору B через

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_B = \inf_{g_j \in \mathcal{D},\, c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} c_j g_j \right\|_B$$

позначимо найкраще m-членне наближення елемента $f \in B$ за системою $\mathcal{D}$. Якщо $\mathcal{D} = \mathcal{H} = \{H_I\}_I$ — система Хаара, то сформулюємо для класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ (що визначаються за допомогою мішаної різниці) наступне твердження про точні порядки величин $\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q = \sup\limits_{f \in B^r_{p,\theta}} \sigma_m(f, \mathcal{H})_{L_q}$.

Теорема. Нехай $1 < p \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Тоді при $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_1 = \dots = r_d > \frac{1}{p}$ має місце порядкова рівність

$$\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} (\ln m)^{(d-1)(r + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

Твердження теореми для $\theta = \infty$ одержано в [1]. Зазначимо, що величини $\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{T})_q$ для тригонометричної системи $\mathcal{T} = \{e^{i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ вивчались в [2]. Порівнюючи результат теореми з відповідними оцінками величин $\sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{T})_q$ [2], робимо висновок, що при деяких співвідношеннях між r, p, q і θ найкращі m-членні наближення за системою Хаара мають перевагу в порівнянні з наближеннями за тригонометричною системою.

Література

1. А. В. Андрианов, *Приближение функций из классов MH^r_q полиномами Хаара,* Матем. заметки., **66**, № 3 (1999), 323–335.

2. А. С. Романюк, *Наилучшие M-членные приближения классов Бесова периодических функций многих переменных,* Изв. РАН. Сер. матем., **67**, № 2 (2003), 61–100.

Інститут математики НАН України
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Наближення функцій з класів H_ω їх інтегралами Пуассона

Тетяна Степанюк

Нехай C – простір 2π-періодичних функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Модулем неперервності функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a,b]$, називають функцію $\omega(t) = \omega(f,t)$, визначену для $t \in [0, b-a]$ за допомогою рівності

$$\omega(t) = \omega(f,t) = \sup_{0\le h\le t} \max_{a\le x\le b-h} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x'-x''|\le t,\\ x',x''\in[a,b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Кажуть, що $f \in H_\omega$, якщо для $\forall x', x''$ виконується нерівність $|f(x) - f(x')| \le \omega(|x-x'|)$, де $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності.

Величину $P(\rho; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), 0 \le \rho < 1$, називають інтегралом Пуассона функції f.

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; P_\rho\right)_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f\left(x\right) - P_\rho\left(f; x; \Lambda\right)\|_X,$$

де X — нормований простір, $\mathfrak{N} \subseteq X$ — заданий клас функцій, P_ρ — інтеграли Пуассона функції f, будемо називати, наслідуючи О. І. Степанця [1], задачею Колмогорова–Нікольського.

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\rho) = \varphi(P_\rho; \rho)$, така, що при $\rho \to 1-$ $\mathcal{E}(H_\omega; P_\rho)_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho))$, то кажуть, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для оператора P_ρ на класі H_ω в метриці простору C.

Основною метою є вивчення асимптотичної поведінки величин

$$\mathcal{E}(H_\omega; P_\rho)_C = \sup_{f\in H_\omega} \|f(x) - P_\rho(f,x)\|_C, \quad \rho \to 1-.$$

Теорема. Для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ при $\rho \to 1-$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}\left(H_\omega; P(\rho)\right)_C = (1-\rho)\left[\frac{1+\rho}{\pi}\int\limits_0^\pi \omega(t)\frac{dt}{(\rho-\cos t)^2 + \sin^2 t}\right].$$

Література

1. Степанец А.И. *Классификация и приближение периодических функций.* — К.: Наук.Думка, 1987. — 268 с.

Волинський національний університет імені
Лесі Українки
e-mail: *tanjuwka_cherry@mail.ru*

Приближение непрерывных функций ломаными

В.Ф. Сторчай

Пусть на $[0;1]$ задана непрерывная функция $f(x)$, $0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ — произвольное разбиение отрезка $[0;1]$. Обозначим через $\tilde{L}_n(f;x)$ ломаную, интерполирующую $f(x)$ в узлах x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$. В случае равномерного разбиения отрезка ломаную будем обозначать через $L_n(f;x)$.

Ломаные (или полиномиальные сплайны первой степени) с успехом прменяются в качестве промежуточного приближения. Лебег, например, использовал промежуточное приближение ломаными для доказательства теоремы Вейерштрасса о полноте множества алгебраических многочленов в пространстве $C[0,1]$. В дальнейшем этот метод развивался в глубоких исследованиях Н.П. Корнейчука [1] и [2].

Пусть $H_\omega[0,1]$ — класс непрерывных на [0,1] функций, модуль непрерывности которых не превышает заданного модуля непрерывности $\omega(t)$.

В работе [3] дается точное решение задачи о вычислении верхней грани отклонения в метрике L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ функций $f(x) \in C[0,1]$ от вписанной в неё ломаной $L_n(f;x)$ на классе функций $H_\omega[0,1]$, заданного выпуклым модулем непрерывности $\omega(t)$. В случае $p = \infty$ эта задача решена Малозёмовым В.Н. [4].

Рассматривается аналогичная задача, когда $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности.

Теорема. Для произвольного модуля непрерывности $\omega(t)$ и фиксированного натурального n

$$\inf_{x_n} \sup_{f \in H_\omega[0,1]} \int_0^1 |f(x) - \tilde{L}_n(f;x)|^p dx = \sup_{f \in H_\omega[0,1]} \int_0^1 |f(x) - L_n(f;x)|^p dx =$$

$$= 2n \int_0^{1/(2n)} \omega^p(t) dt, \quad 0 < p < 1.$$

Литература

1. Н. П. Корнейчук, *О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций,* ДАН АН СССР, т. 41, № **2** (1961), 304–307.

2. Н. П. Корнейчук, *О наилучшем приближении непрерывных функций,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, № **1** (1963), 29–44.

3. В. Ф. Сторчай, *Об отклонении ломаных в метрике L_p,* Матем. заметки, т. 5, № **1** (1969), 31–37.

4. В. Н. Малозёмов, *Об отклонении ломаных,* Вестник Ленингр. ун-та, № **7** (1966), 150–153.

Национальный горный
университет
e-mail: svv777@gmail.com

Шкала неравенств с точными константами для сплайнов произвольного порядка

Николай Стрелков

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $S_n(x) = S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$ — интерполяционный сплайн порядка n класса $C^{n-1}(\mathbb{R})$, совпадающий с $f \in C(\mathbb{R})$ в узлах равномерной сетки $\mathbb{R}_h = \{kh : k \in \mathbb{Z}\}$, причем областями полиномиальности сплайна S_n являются интервалы $(kh + (n-1)h/2, kh + (n+1)h/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть

$$Q_n(x, z) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} z^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (x + k - j)^n$$

и $R_n(z) = zQ_n(1 - d_n, z)$, где $d_n = (n+1)/2 - [(n+1)/2]$. Полином R_n имеет степень $2[n/2] + 1$, а его нули z_r ($|r| \le [n/2]$) таковы, что $z_0 = 0$, $z_1, \ldots, z_{[n/2]}$ — различные точки интервала $(-1, 0)$, а $z_{-r} = 1/z_r$ для всех $r = 1, \ldots, [n/2]$.

Пусть $A_n(x, t)$ — кусочно–полиномиальная функция, определяемая в полосе $(0, 1/2) \times \mathbb{R}$ следующим образом: для $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, 1/2)$, $t \in (0, 1)$

$$A_n(x, k + t) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k} Q_n(t, z_r) Q_n(1 - d_n - x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+1} R_n'(z_r)}, \text{ если } t + k < x;$$

$$A_n(x, k + t) = (-1)^{n+1} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n} Q_n(1 - t, z_r) Q_n(d_n + x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+1} R_n'(z_r)}, \text{ если } t + k > x.$$

Теорема. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty$.
Если $0 \le m < j \le n + 1$, то

$$\|S_n^{(m)} - f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le C(m, j, p, n) h^{j-m-1/p} \|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})};$$

если $0 \le j \le m \le n$, то

$$\|S_n^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le C(m, j, p, n) h^{j-m-1/p} \|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{1}$$

Постоянные $C(m, j, p, n)$ имеют вид

$$C(m, j, p, n) = \|F_{m,j,p,n}\|_{L_\infty(0,1/2)},$$

где

$$F_{m,j,p,n}(x) = \|D_1^m D_2^{n+1-j} A_n(x, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}, \ q = \frac{p}{p-1}.$$

Константы $C(m, j, p, n)$ уменьшить нельзя.

Ярославский государственный
университет
e-mail: strelkov@uniyar.ac.ru

Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие подпространства ядра дифференциального оператора

Е.В.Стрелкова, В.Т.Шевалдин

Пусть $\mathcal{L}_r(D) = \prod\limits_{j=1}^{r}(D-\beta_j)$ $(\beta_j \in \mathbb{R})$ — линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, все корни β_j характеристического многочлена которого попарно различны, и пусть φ_r — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ $(j = \overline{0, r-1})$, где $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. Для функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod\limits_{j=1}^{r}(T - e^{\beta_j h}E)f(x)$ — конечную разность с шагом $h > 0$, соответствующую оператору $\mathcal{L}_r$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор. B-$\mathcal{L}$-сплайн r-го порядка с носителем $[0, rh]$ определим формулой: $B(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_r}\varphi_r((x-rh)_+)$, где $t_+ = \max\{0, t\}$. Для фиксированного числа $\alpha:\ 0 \le \alpha < 1$ положим $y_j = f((j+\alpha)h)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и рассмотрим систему функционалов

$$I_j = \sum_{s=1}^{r} c_s y_{j+s-1+\alpha} \quad (j \in \mathbb{Z},\ c_s \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Локальный $\mathcal{L}$-сплайн S, задающий линейный метод приближения функции f, определим формулой $S(f, x) = \sum\limits_j I_j B(x - jh)$ $(x \in \mathbb{R})$. Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_r(D)$ представим в виде $\mathcal{L}_r(D) = \mathcal{L}_m(D)\mathcal{L}_{r-m}(D)$, $\mathcal{L}_m(D) = \prod\limits_{j=1}^{m}(D-\beta_j)$ $(m \le r)$. Коэффициенты c_s $(s = \overline{1, r})$ в формуле (1) определяются из равенств $S(e^{\beta_j \cdot}, x) = e^{\beta_j x}$ $(j = \overline{1, m})$. Нами указана невырожденная система m линейных алгебраических уравнений для определения чисел $c_1, \dots, c_r$ и исследованы аппроксимативные свойства построенных локальных $\mathcal{L}$-сплайнов на соболевских классах функций $W_p^{\mathcal{L}_n}$ $(1 \le p \le \infty)$, задаваемых с помощью дифференциальных операторов вида $\mathcal{L}_n(D) = \prod\limits_{j=1}^{n}(D-\beta_j)$ $(n \le m)$.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 08–01–00325) и Интеграционным проектом, выполняемым учеными УрО РАН совместно с СО РАН.

Институт математики
и механики УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Сравнение относительных и колмогоровских поперечников классов дифференцируемых функций

Ю.Н. Субботин, С.А. Теляковский

Рассматривается вопрос о наименьшем значении множителя M, при котором справедливо равенство

$$K_n(W_C^r, MW_C^j, C) = d_n(W_C^r, C).$$

Такое значение M обозначим $M_n(r,j)$.

Ранее были получены оценки величин $M_n(r,j)$ при $j \le r$. Сейчас выяснен порядок зависимости величин $M_n(r,j)$ от n в случае, когда $j > r$.

Теорема. Для величины $M_n(r,j)$ при $j > r$ справедливы оценки

$$c_1(r,j)n^{j-r} \le M_n(r,j) \le c_2(r,j)n^{j-r},$$

где положительные множители $c_1(r,j)$ и $c_2(r,j)$ зависят только от r и j.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08 – 01 – 00320 и 08 – 01 – 00598).

Россия, Екатеринбург
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский государственный
университет им. А.М.Горького,

Математический институт
Российской Академии наук
e-mail: sergeyaltel@jandex.ru

The Conditions of Uniqueness of the Constant of the Best Nonsymmetric L_1-approximations for Continuous Vector-valued Functions

Marina Tkachenko, Viktoria Traktinskaya

Let Q be the metric compact, Σ – σ-field of Borell subsets of Q, μ – nonnegative finite nonatomic measure on Σ, $C(Q)$ – the space of continuous functions $f : Q \to \mathrm{R}$, $C(Q, \mathrm{R^m})$ - the space of the vector-valued functions $\bar{f} : Q \to \mathrm{R^m}$ with the norm

$$||\bar{f}||_{1;\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_Q (\alpha \cdot f_{i+}(x) + \beta \cdot f_{i-}(x))\, d\mu(x),$$

where $\bar{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, $f_i \in C(Q)$, $i = 1, ..., m$, $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x); 0\}$.

For $\bar{f} \in C(Q, \mathrm{R^m})$ and $H \subset C(Q)$ the value

$$E(\bar{f}, H)_{1;\alpha,\beta} := \inf\{\|\bar{f} - \bar{u}\|_{1;\alpha,\beta} : \quad \bar{u} = (u, u, ..., u), \quad u \in H\} \tag{1}$$

is called the best $(\alpha, \beta)-$approximation of a vector-function $\bar{f}$ by elements from the set H in metric of space L_1, and any function from H which realizes the infimum on the right-hand side of (1) is called the best $(\alpha, \beta)-$approximant to $\bar{f}$ from H in metric of space L_1.

The problems of uniqueness of the best $(\alpha, \beta)-$approximant for functions from $C(Q, \mathrm{R^m})$ by the subspace

$$H_0 = \{f \in C(Q) : \quad f(x) = a, \quad \forall x \in Q, \quad a \in \mathrm{R}\}$$

are considered.

Theorem. Let $Q = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$, where Q_j – connected subsets of Q.

1) If $\exists k \in \mathrm{N}$: $m = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot k$ or $m = \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot k$, then the subspace H_0 is never space of the uniqueness of the best $(\alpha, \beta)-$approximant for functions from $C(Q, \mathrm{R^m})$ in metric of space L_1.

2) If $\forall k \in \mathrm{N}$ $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot k$ and $m \neq \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot k$, then the subspace H_0 is a space of the uniqueness of the best $(\alpha, \beta)-$approximant for functions from $C(Q, \mathrm{R^m})$ in metric of space L_1, if metric compact Q satisfies property: for any numbers $k_j \in \mathrm{Z}$, $j = 1, 2, ..., n$, such that $0 \leq k_j \leq m$,

$$\sum_{j=1}^{n} (\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \cdot k_j - m) \cdot \mu(Q_j) \neq 0.$$

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: mtkachenko2009@ukr.net

Dnepropetrovsk National
University
e-mail: victoria-dp@yandex.ru

Сравнение линейных операторов

Роальд М.Тригуб

1)Некоторые общие теоремы
2)Мультипликаторы Фурье и алгебра абсолютно сходящихся интегралов Фурье
3)Методы суммирования рядов Фурье и К-функционалы пространств гладких функций
4)Положительно определённые функции и сплайны.Точные неравенства
5)Сравнение линейных дифференциальных операторов

Литература

1. R. M. Trigub,E. S.Belinsky,Fourier Analysis and Approximation of Functions.- Kluwer-Springer.2004

2. R. M. Trigub ,*Fourier Multipliers and Comparison of Linear Operators,* Operator Theory:Advances and Applications,v.191 (2009),p.499-513.Birkhauser Verlag Basel/Switzerland

3. R. M. Trigub , *Exast order of approximation of periodic functions by linear polynomial operators,* .East J.on Appr.,15:1 (2009),p.25-50

4. E. Liflyand and R. Trigub , *Know and new results on absolute convergence of Fourier integrals* , CRM Publications,preprint 859 (june 2009),29 p.

Донецкий национальный университет
e-mail: roald.trigub@gmail.com

Рівності, пов'язані з багатокутниками, для поліаналітичних функцій

Ольга Трофименко

Окремі результати, що пов'язані з поліаналітичними функціями і багатокутниками, представлені у роботах М.О.Ріда. Певні випадки із середнім значенням у вершинах n-кутника можна побачити у [1]. В даній роботі представлені теореми, що пов'язані з результатами статті [2]. Нижче наведені твердження із функцією спеціального виду.

Теорема. Нехай $n, m, \in \mathbb{N}$, $h, s \in \mathbb{Z}$, $0 \le h < n - s$, $0 \le s \le m - 1$ і функція

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \tag{8}$$

де $c_{k,l}$ - довільні константи.

Тоді для кожного правильного n-кутника $p_n(z, r)$ з центром в точці z і радіусом r вписаного кола виконується рівність

$$\int\int_{P_n(z)} (\zeta - z)^s f(\zeta) d\xi d\eta = \sum_{p=s}^{h+s} \frac{nr^{2p+2}\lambda_p}{(2p+2)(p-s)!p!} (\frac{\partial}{\partial z})^{p-s} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^{p} f(z), \tag{9}$$

де $\lambda_p = \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{dt}{cos^{2p+2} t}$.

Теорема. Нехай $s, h \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, $0 \le h < n - s$, $0 \le s \le m - 1$, $q = min\{h, m - 1\}$ і функція

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \tag{10}$$

де $c_{k,l}$-const. Тоді виконується рівність

$$\sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^s f(\zeta_\nu + z) = \sum_{p=s}^{q} \frac{nr^{2p}}{(p-s)!p!} (\frac{\partial}{\partial z})^{p-s} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^{p} f(z), \tag{11}$$

де ζ_ν - вершини кожного правильного n-кутника з центром в точці z і радіусом вписаного кола r.

References

1. V. V. Volchkov, Integral Geometry and Convolution Equation. - Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454p.

2. О. Д. Трофименко, *Теорема о среднем для полианалитических функций,* Труды ИПММ НАН Украины, **17** (2008), 194–196.

Донецький Національний
Університет
e-mail: odtrofimenko@gmail.com

О единственности наилучшего приближения выпуклым конусом в пространстве непрерывных функций

В. М. Федоров

Пусть E обозначает банахово пространство над полем действительных чисел или комплексных чисел и E^* его сопряженное пространство. Множество $M \subset E$, обладающие свойством существования и единственности наилучшего приближения, называются *чебышевским.* Выпуклое коническое множество $K \subset E$ называется *клином.* Замкнутый клин называется *конусом.* Пусть $p \in K$.

Далее обозначаем через $\nabla_p K \doteqdot \operatorname{cone}(K - p)$ — коническую оболочку множества $K - p$, называемую *опорным клином* в точке p; через $\varPi_p K \doteqdot \nabla_p K \cap (-\nabla_p K)$ — наибольшее линейное подпространство, содержащееся в опорном клине $\nabla_p K$, называемое *опорной плоскостью* в точке p; через $\nabla_p^\circ K \doteqdot \{\alpha \in K^\circ \mid \Re\alpha(p) = 0\}$ — полярный* конус опорного клина $\nabla_p K$ в точке p, где $K^\circ = \{\alpha \in E^* \mid \Re\alpha(x) \leqslant 0,\, x \in K\}$.

Пусть $K \subset C(X)$ — конус конечной размерности в пространстве непрерывных функций на компакте X с чебышевской нормой и точка $p \in K$. Будем говорить, что ненулевая функция $g \in \varPi_p K$ имеет *полярные нули* $g(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, если найдется ненулевая линейная комбинация функционалов Дирака $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i}$, которая принадлежит полярному* конусу $\alpha \in \nabla_p^\circ K$.

Теорема 1. Конус $K \subset C(X)$ конечной размерности является чебышевским в том и только в том случае, когда для любой точки $p \in K$ каждая ненулевая функция из опорной плоскости $g \in \varPi_p K$ не имеет полярных нулей на компакте X.

Пусть $d\nu = \phi\, d\mu$ — представляющая мера функционала $\alpha \in C^*(X)$ на компакте X, где $|\phi(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$. Носителем меры $\operatorname{supp}(\mu)$ называется наименьшее замкнутое множество, вне которого мера равна нулю. Носители функционала α и меры μ совпадают $\operatorname{supp}(\alpha) = \operatorname{supp}(\mu)$. Далее через $\operatorname{zero}(f)$ обозначаем множество нулей непрерывной функции $f \in C(X)$, т. е. $\operatorname{zero}(f) \doteqdot \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

При этих обозначениях можно сказать, что ненулевая функция $g \in \varPi_p K$ имеет *полярные нули*, если существует ненулевой функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, для которого $\operatorname{supp}(\alpha) \subset \operatorname{zero}(g)$. Это определение, очевидно, согласуется с указанным выше.

Теорема 2. Конус $K \subset C(X)$ бесконечной размерности не обладает свойством единственности тогда и только тогда, когда существуют точка $p \in K$, ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и ненулевая функция $g \in \varPi_p K$, для которых имеет место включение $\operatorname{supp}(\alpha) \subset \operatorname{zero}(g)$.

Эти теоремы имеют достаточно общий характер. Например, из них легко можно вывести теоремы Хаара и Колмогорова о единственности наилучшего приближения конечномерным подпространством. В случае, когда конус является бесконечномерным подпространством в $C(X)$, аналогичную теореме 2 в несколько другой формулировке вначале доказал Зингер, а затем обобщил Фелпс.

Московский государственный университет
e-mail: vferdorov@rambler.ru

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах А. И. Степанца *

Ю.И. Харкевич и Т.В. Жигалло

Рассмотрим классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ А. И. Степанца (см., напр., [1]). Пусть $\psi(k)$ — произвольная фиксированная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f, является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L_1$, то φ называют (ψ,β)-производной функции f и обозначают через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. Подмножество функций $f \in L_1$, у которых существуют (ψ,β)-производные, обозначают через L^{ψ}_{β}. Подмножество непрерывных функций из L^{ψ}_{β} обозначают через C^{ψ}_{β}. Если $f \in C^{\psi}_{\beta}$ и при этом $\operatorname{ess\,sup}\limits_{t} \left|f^{\psi}_{\beta}(t)\right| \le 1$, то говорят, что $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Отметим, что классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ при $\psi(k) = k^{-r},\ r > 0$, совпадают с классами Вейля–Надя, а если $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta = r,\ r \in N$, — то с классами Соболева.

Через M обозначим множество функций $\psi(t)$, $t \ge 1$, которые удовлетворяют следующим условиям

$$M = \left\{\psi(t) : \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1 + t_2)/2\right) + \psi(t_2) \ge 0\ \forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\right\}.$$

В работе изучается асимптотическое поведение величины

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{\delta}\right)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - P_{\delta}(f;\cdot)\|_C\,,\ \delta \to \infty,$$

где $P_{\delta} = P_{\delta}(f;\cdot),\ \delta > 0,$ — интеграл Пуассона функции $f \in L_1$ [2].

Теорема. Пусть $\psi \in M$, функция $u\psi(u)$ при $u \in [b,\infty)\,,\ b \ge 1$, выпукла вниз и $\int\limits_1^{\infty} u^2\psi(u)du < \infty$. Тогда при $\delta \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{\delta}\right)_C = \frac{1}{\delta} \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\|f^{(1)}_0(x)\right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

где $f^{(1)}_0$ — (ψ,β)-производная функции f при $\psi(t) = \frac{1}{t}$, $\beta = 0$.

Условия данной теоремы удовлетворяют, например, функции $\psi \in M$, которые при $t \ge 1$ имеют вид $\psi(t) = \frac{\ln^{\alpha}(t+K)}{t^r}$, $\psi(t) = \frac{1}{t^r}(K + e^{-t})$, где $r > 3$, $K > 0$, $\alpha \in R$; $\psi(t) = t^r e^{-Kt^{\alpha}}$, $\psi(t) = \ln^r(t+e)e^{-Kt^{\alpha}}$, $K > 0$, $\alpha > 0$, $r \in R$.

1. А. И. Степанец, *Методы теории приближения.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, Ч.I, 2002.

2. А Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* — Москва: Мир, 1965.

Волынский национальный
университет имени Леси Украинки
e-mail: yu-kharkevych@ukr.net

Волынский национальный
университет имени Леси Украинки
e-mail: tetvas@ukr.net

* Выполнено при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант Ф25.1/043)

По оптимальне кодування класів поверхонь, заданих за допомогою модуля немонотонності

Ярослав Чкана

Нехай $I = [0;1] \times [0;1]$– одиничний квадрат зміни параметрів u та v; m, n – довільні фіксовані натуральні числа; Δ_n і δ_m – відповідні розбиття відрізків зміни параметрів u та v. Через $\overline{BH}_\mu[I]$ позначимо клас параметрично заданих поверхонь $\overline{\varphi}(u,v) = \{\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)\}$, у яких кожна координатна функція належить до класу функцій, що задовольняють умови: 1) $\sup\limits_{x,y \in I} |f(x,y)| \ \leq B$, 2) $\mu\ (f;t,\tau) \leq \mu\ (t,\tau)$, де $\mu\ (t,\tau)$– заданий модуль немонотонності.

Модулем немонотонності функції двох змінних називають величину [1]

$$\mu(f;t,\tau) = \frac{1}{2} \sup_{|x'-x''|\leq t, |y'-y''|\leq \tau} \ \sup_{x'\leq x\leq x'', y'\leq y\leq y''} \left\{ |f(x',y') - f(x,y)| + \right.$$

$$\left. + |f(x'',y'') - f(x,y)| - |f(x',y') - f(x'',y'')| \right\}.$$

Однією з величин, що характеризує похибку відновлення елементів деякої множини F метричного простору X_ρ, є інформаційний поперечник [2]

$$\gamma^N(F, X_\rho) = \inf_{M_N} D(F, M_N, X_\rho),$$

де $D(F, M_N, X_\rho) = \sup\{\rho(y,z) : y, z \in F, T(y, M_N) = T(z, M_N)\}$ – діаметр області невизначеності при кодуванні за інформацією $T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}$.

Відстань між поверхнями $\overline{\varphi}\,(u,v) = \{\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)\}$ та $\overline{\psi}\,(u,v) = \{\psi_1(u,v), \psi_2(u,v), \psi_3(u,v)\}$ визначимо за формулами $R(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup\limits_{0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq 1} \left\{ r(P(u,v), Q(u,v)) : P(u,v) \in \overline{\varphi}, Q(u,v) \in \overline{\psi} \right\}$ і через хаусдорфову відстань $h(A,B) = \max\left\{ \sup\limits_{P\in A} \inf\limits_{Q\in B} r(P,Q), \sup\limits_{Q\in B} \inf\limits_{P\in A} r(P,Q) \right\}$, породжені евклідовою відстанню $r(P,Q)$ між точками простору.

Теорема. *Нехай* $A = \max\limits_{i,j,s, i\neq j} |\varphi_s(u_i, v_i) - \varphi_s(u_j, v_j)|$, $i, j, s = 1, 2, 3$. *Тоді для заданого опуклого модуля немонотонності справедливими є співвідношення*

$$2\sqrt{3}\mu\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right) \leq \gamma^N\left(B\overline{H}_\mu[I], X_R\right) \leq 2\sqrt{3}\left(A + \mu\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)\right),$$

$$\sqrt{3}\mu\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right) \leq \gamma^N\left(B\overline{H}_\mu[I], X_h\right) \leq \sqrt{3}\left(A + \mu\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)\right).$$

[1] Мартынюк В.Т.,*О линейных методах приближения ограниченных функций двух переменных относительно одной метрики хасдорфова типа,* Изв. ВУЗов, сер. Математика ,**74**,№7 (1968),42-50.

[1] Корнейчук Н.П.,*Информационные поперечники*//Укр. мат. журн., **47**,№11 (1995),1506-1518.

Сумський державний педагогічний
університет
e-mail: chkana_76@mail.ru

О наилучших полиномиальных приближениях и точных значениях поперечников функциональных классов в весовых пространствах Бергмана

М.Ш.Шабозов

Известен ряд окончательных результатов, связанных с полиномиальной аппроксимацией аналитических в круге функций и вычислением точных значений различных поперечников классов аналитических функций. В случае весовых пространств указанные вопросы менее изучены. Пусть $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная измеримая суммируемая в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция. Символом $B_{q,\gamma}$ $(1 \leqslant q < \infty)$ обозначим пространство Бергмана с весом, состоящее из аналитических в U функций, для которых

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left\{\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{U} \gamma(|z|)|f(z)|^q dxdy\right\}^{1/q} < \infty; \quad z = x + iy.$$

Под $B_{q,\gamma,\rho}$ $(1 \leqslant q < \infty;\ 0 < \rho \leqslant 1)$ понимаем пространство Бергмана аналитических в круге $|z| < \rho$ функций f, для которых $\|f\|_{B_{q,\gamma,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\leqslant n$; $E_n(f)_{B_{q,\gamma,\rho}} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma,\rho}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ — наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in B_{q,\gamma}$. Для $m \in \mathbb{N}$ через $f_{arg}^{(m)}$ обозначим производную m-го порядка по аргументу комплексного переменного z. Для $f \in B_{q,\gamma}$ величину

$$\omega(f,t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h|\leqslant t; h\in\mathbb{R}} \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} r\gamma(r)\left|f(re^{i(t+h)}) - f(re^{it})\right|^q drdt\right\}^{1/q}$$

назовем интегральным модулем непрерывности в пространстве $B_{q,\gamma}$. Приведем один из полученных результатов.

Теорема. Для произвольной функции $f \in B_{q,\gamma}$ $(1 \leqslant q < \infty)$, у которой $f_{arg}^{(m)} \in B_{q,\gamma}$ $(m \in \mathbb{N})$ при любых $0 < \rho \leqslant 1$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы точные неравенства

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,\rho}} \leqslant \frac{\rho^n}{4n^{m-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(f_{arg}^{(m)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt.$$

Институт математики АН
Республики Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Об одном аналоге неравенства Чебышева для монотонных функций

А.Л. Шидлич

Пусть f, p и g — произвольные интегрируемые на отрезке $[a,b]$ функции, $p(x)\geq 0$. Если одна из функций f или g не возрастает, а другая — не убывает, то выполняется неравенство

$$\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx, \tag{1}$$

если же обе функции f и g не убывают (не возрастают), то выполняется противоположное неравенство. Неравенства вида (1) принято называть *неравенствами Чебишева.*

Изучается вопрос о минимальных условиях на функции p и g, гарантирующих выполнение неравенства

$$\left(\int_a^b p^r(x)dx\right)^{1/r}\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b p^r(x)f^r(x)dx\right)^{1/r}\int_a^b p(x)g(x)dx, \tag{2}$$

где r — прозвольное положительное число, для любой неотрицательной интегровной на $[a,b]$ функции f.

Теорема. *Пусть $r\in[1,\infty)$, p и g — произвольные неотрицательные функции, интегрируемые на отрезке $[a,b]$, $p(x)>0$. Тогда для того, чтобы неравенство (2) выполнялось для любой неотрицательной невозрастающей на $[a,b]$ функции f, необходимо и достаточно, чтобы для всех $s\in(a,b]$ выполнялось условие*

$$\int_a^s p(x)g(x)dx\left(\int_a^s p^r(x)dx\right)^{-1} \leq \int_a^b p(x)g(x)dx\left(\int_a^b p^r(x)dx\right)^{-1}. \tag{3}$$

Заметим, что при $r=1$ для выполнения условия (3) достаточно, чтобы функция $g(x)$ не убывала на $[a,b]$. Если же $r>1$, то выполнение условия (3) гарантируется, в частности, неубыванием произведения $p^{1-r}(x)g(x)$.

Заметим также, что в случае, когда функции f и p не возрастают, а $g(x)=0$ при $x\in[a,\sigma]$ и $g(x)=1/p(x)$ при $x\in(\sigma,b]$, $a<\sigma<b$, справедливость неравенства (2) при выполнении условия (3) доказана в [1] при доказательстве леммы 3.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект GP/F27/0103).

Литература

1. A.I. Stepanets and A.L. Shidlich, "Best approximations of integrals by integrals of finite rank" J. Approx. Theory **162** (2010), 323–348.

Институт математики НАН Украины
e-mail: andy709@list.ru

Восстановление сигналов сплайнами

А.А.Шумейко, И.В.Девяткин

Практически для всех реальных измерительных устройств, результат измерения является сверткой входного сигнала с аппаратной функцией прибора

$$\tilde{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(\tau - t)dt,$$

где $\tilde{f}$ и f - выходной и входной сигналы соответственно, а φ - аппаратная функция прибора (импульсный отклик). Аппаратная функция прибора соответствует реакции прибора на поданный на его вход δ-импульс. В некоторых случаях искажения такого рода нельзя игнорировать, что может быть обусловлено, например, инерционностью прибора или невозможностью повторить измерения (космические съемки, результаты медицинских исследования и пр.) Данная работа посвящена восстановлению исходного сигнала для известной аппаратной функции прибора.

Пусть $h > 0$ и $\varphi \in C_{(-\infty,\infty)}$ унимодальная четная функция такая, что $\varphi(t) = 0$ для $t \notin (-h/2, h/2)$, для которой выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$. Будем считать, что прибором с аппаратной функцией φ, измеряется сигнал с дискретным шагом h.

Пусть $S_r\left(\{ih\}_{i\in Z}\right)$ множество сплайнов минимального дефекта порядка r, заданных на разбиении $\{ih\}_{i\in Z}$. Сплайн $s_r\left(f, \{ih\}_{i\in Z}, t\right) \in S_r\left(\{ih\}_{i\in Z}\right)$ будем называть φ-интерполяционным, если выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_r\left(f, \{ih\}_{i\in Z}, t\right)\varphi(ih - t)dt = \tilde{f}(ih).$$

Заметим, что если φ есть аппаратная функция идеального прибора, то есть δ-функция, то это условие приводит к традиционной интерполяции, если $\varphi(t) = 1/h$ для $t \in [-h/2, h/2]$, то получаем интерполяцию в среднем. В работе рассмотрены условия на аппаратную функцию $\varphi(t)$, при которых φ-интерполяционный сплайн порядка $r = 1, 2, 3$ существует и единственен. Выписаны алгоритмы построения φ-интерполяционных сплайнов.

Литература

1. А.А.Лигун, *Асимптотические методы восстановления кривых*/ А.А.Лигун, А.А.Шумейко. – К: 1997. – 358 с.

ОКВУЗ "Институт предпринимательства "Стратегия"" г.Желтые Воды
e-mail: shumeiko_a@ukr.net

ОКВУЗ "Институт предпринимательства "Стратегия"" г.Желтые Воды
e-mail: deviatkin@gmail.com

Точные оценки приближения классов дифференцируемых функций ломаными в метрике пространства $\varphi(L)$

А.Н.Щитов, С.Б.Вакарчук

Пусть $C \equiv C([0,1])$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций; Φ — множество четных конечных неубывающих на полусегменте $[0,\infty)$ функций φ таких, что $\varphi(0)=0$, $\lim\{\varphi(x) : x \to \infty\} = \infty$. Если $\varphi \in \Phi$, то через $\varphi(L)$ обозначим множество всех измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых

$$\|f\|_{\varphi(L)} = \int_0^1 \varphi(f(x))dx < \infty.$$

Если, например, $\varphi(x) = |x|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то $\varphi(L)$ есть $L_p \equiv L_p([0,1])$ — нормированное пространство функций, интегрируемых в p-той степени, и $\|f\|_{\varphi(L)}$ есть p-я степень нормы $\|f\|_{L_p}$.

Через $W^r H^*_\omega$ $(r \in \mathbb{N})$ обозначим класс 1-периодических r раз непрерывно дифференцируемых функций f, у которых модуль непрерывности r-той производной $\omega(f^{(r)}, t)$ не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(t)$. Полагаем [1] $\Omega_r(\omega, t) = \sup\{\max\{|f(x+t)-f(x)| : x\} : f \in W^r H^*_\omega\}$.

На отрезке $[0,1]$ введем равномерное разбиение $t_i = i/n$ $(i = \overline{0,n})$ и сопоставим функции $f \in C$ интерполирующую её ломаную $\sigma_n(f)$, которая линейна на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = \overline{1,n})$ и $\sigma_n(f, t_i) = f(t_i)$ $(i = \overline{0,n})$. При $n = 2^{m+1}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ $\sigma_n(f)$ можно рассматривать как частную сумму ряда Фабера-Шаудера, построенного для функции f [2]. Сформулируем один из полученных результатов.

Теорема. Пусть функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на $[0,\infty)$, ω — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in W^{2\nu+1} H^*_\omega$ $(\nu \in \mathbb{N})$ и $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{\varphi(L)} \leqslant n \int\limits_0^{1/n} \varphi\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^x \Omega_{2\nu}(\omega; 2t - 1/n)dt\right)dx, \tag{1}$$

которое при $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$ неулучшаемо на классе $W^{2\nu+1} H^*_\omega$ в том смысле, что существует функция $f_0 \in W^{2\nu+1} H^*_\omega$, обращающая (1) в равенство.

1. Н. П. Корнейчук, *Про екстремальнi властивостi перiодичних функцiй,* Доповiдi АН УРСР, №8 (1962), 993–998.

2. С. Б. Вакарчук, А.Н.Щитов, *Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых функций частными суммами рядов Фабера-Шаудера,* Мат. сборник, **197**, №3 (2006), 3–14.

Академия таможенной
службы Украины
e-mail: postgraduate@rambler.ru

Днепропетровский университет
экономики и права
e-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Наближення функцiй з класiв Бєсова цiлими функцiями

С. Я. Янченко

Дослiджуються класи $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцiй багатьох змiнних. Вперше данi класи були розглянутi Амановим Т. I. [1], при значеннi параметра $\theta = \infty$ вони спiвпадають з класами $S^r_p H(\mathbb{R}^d)$, якi ранiше були введенi Нiкольським С. М. [2].

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \theta$ — простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою.

Визначимо апроксимативну характеристику, про яку йтиме мова в доповіді.

Розглянемо множину $\mathfrak{M}$, яка складається із скінченної кількості векторів $s = (s_1, \ldots, s_d)$ з цілочисельними координатами і множину

$$Q_{2^s} := \{\lambda \in \mathbb{R}^d : \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \ \ j = \overline{1, d}\},$$

де $\eta(0) = 0$ и $\eta(t) = 1, \ t > 0$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, покладемо

$$S^{\mathfrak{M}}(f, x) = \sum_{s \in \mathfrak{M}} \delta_s^*(f, x), \tag{1}$$

де

$$\delta_s^*(f, x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F} f \cdot \chi_{Q_{2^s}}),$$

$\mathfrak{F} f$ и $\mathfrak{F}^{-1} f$ — відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функції f, а $\chi_{Q_{2^s}}$ — характеристична функція множини Q_{2^s}.

Таким чином, рівність (1) визначає цілу функцію $S^{\mathfrak{M}}(f, x)$, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ [3], носій перетворення Фур'є якої зосереджений на множині $\bigcup\limits_{s \in \mathfrak{M}} Q_{2^s}$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, розглянемо наступну апроксимативну характеристику

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_q = \inf_{\mathfrak{M}: mes \bigcup\limits_{s \in \mathfrak{M}} Q_{2^s} \leqslant M} \|f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q,$$

де $mes A$ позначає лебегову міру множини A.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ – деякий клас функцій, то покладемо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^{\mathfrak{F}}(f)_q.$$

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1. Нехай $1 < p < q < \infty$, $r_1 > 1/p - 1/q$. Тоді для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ справедливе порядкове співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta} B)_q \asymp M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu - 1} M)^{(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a; \ 0\}$.

Теорема 2. Нехай $1 < p < 2$, $r_1 > 0$. Тоді для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ справедливе порядкове співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta} B)_p \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu - 1} M)^{(r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Література

1. Аманов Т.И., *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta} B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)*}_{p,\theta} B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, \ j = 1, ..., n)$. Тр. Мат. ин-та АН СССР. 77 (1965), 5–34.

2. Никольский С.М., *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера.* Сиб. матем. журнал. 4(6) (1963), 1342–1363.

3. Лизоркин П.И., *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций.* Тр. Мат. ин-та АН СССР. 105 (1969), 89–167.

Інститут математики НАН України
e-mail: Sergiy.Yan@Rambler.ru

Содержание